

KISSsoft AG - ☎ +41 55 254 20 50
Uetzikon 4 - ☎ +41 55 254 20 51
8634 Hombrechtikon - info@KISSsoft.AG
Switzerland - www.KISSsoft.AG

Die neue Ausgabe der Stirnrad-Festigkeitsberechnung nach ISO6336

Änderungen in den Rechenvorschriften haben immer auch einen Einfluss auf die ausgewiesenen rechnerischen Sicherheiten von Festigkeitsnachweisen. Für Berechnungsingenieure ist es dementsprechend wichtig, zu wissen, weshalb und woher entsprechende Unterschiede kommen und wie sie zu beurteilen sind.

Im September 2006 ist die zweite Ausgabe der Norm ISO6336 "Berechnung der Tragfähigkeit von Stirnrädern" [1] erschienen. Die Neufassung enthält einige sehr interessante Verbesserungen und auch einige Probleme, welche hier im Einzelnen besprochen werden. Sehr erfreulich ist, dass nun ein brauchbarer Algorithmus für die Bestimmung der Fuß-Spannung an Innenverzahnungen vorliegt. Außerdem ist erstmalig Teil 6 für Lastkollektive erschienen.

1. Allgemeine Einflussfaktoren (Teil 1 der ISO6336)

Im ersten Teil der Norm sind zwei bedeutende Änderungen geschehen, die beide vor allem Planeten- und Verlagerungsgetriebe betreffen.

1.1. Dynamikfaktor $[K_V]$

Zur Bestimmung des Dynamikfaktors $[K_V]$ nach Methode B muss die Ritzel-Resonanzdrehzahl $[n_E]$ berechnet werden. Dazu wird die Zahneingriffssteifigkeit $[c_\gamma]$ und die reduzierte Masse $[m_{red}]$ benötigt. Für Getriebe mit Zwischenrädern wird die Resonanzdrehzahl neu aus dem Mehrmassensystem mit Berücksichtigung der zwei unterschiedlichen Eingriffssteifigkeiten bestimmt. Bei Planetenstufen wird für die reduzierte Masse mit der Anzahl Planeten gerechnet. Bei solchen Systemen ergeben sich zwei Resonanzdrehzahlen. Eigentlich logisch, aber zum ersten Mal sehr deutlich formuliert, ist der Hinweis, dass **der Dynamikfaktor für beide Resonanzdrehzahlen zu berechnen ist, und die weitere Rechnung mit dem größeren Faktor für beide Eingriffe durchzuführen ist.**

Die Zahneingriffssteifigkeit $[c_\gamma]$ wird wie bisher bestimmt, jedoch benannt als $c_{\gamma\alpha}$, und verwendet zur Bestimmung des Dynamikfaktors K_V . Ein um etwa 15% kleinerer Wert, als $c_{\gamma\beta}$ bezeichnet, wird für die Bestimmung des Breitenlastfaktors verwendet. Dadurch verringert sich der Breitenlastfaktor leicht.

1.2. Breitenlastfaktor $[K_{H\beta}]$

Der Breitenlastfaktor berücksichtigt die ungleiche Lastverteilung über der Zahnbreite. Dieser Effekt ist schwierig zu berechnen und wird in der Norm durch überschlägige Formeln bestimmt. Häufig, insbesondere bei niedrigen Linienlasten (unter 50 N/mm), ergeben sich zu hohe Werte. Die entsprechenden Formeln sind in der neuen Ausgabe fast gleich geblieben.

Der Breitenlastfaktor ist das Verhältnis zwischen maximaler und mittlerer Linienlast. Die Grundgleichung für den Breitenlastfaktor ist (Gleichung 41 der Norm):

$$K_{H\beta} = \frac{(F_m/b)_{\max}}{F_m/b} = 1 + \frac{F_{\beta y} * c_{\gamma\beta}}{2 * F_m/b} \quad (1)$$

$K_{H\beta}$	Breitenlastfaktor
$F_{\beta y}$	Wirksame Flankenlinien-Abweichung (μm)
$c_{\gamma\beta}$	Zahneingriffs-Steifigkeit ($\text{N}/\text{mm}/\mu\text{m}$)
F_m/b	Mittlere Linienlast (N/mm)
$(F_m/b)_{\max}$	Maximale örtliche Linienlast (N/mm)

Die wirksame Flankenlinien-Abweichung $F_{\beta y}$ wird (Gleichung 52) unter der Annahme einer linearisierten bestimmten Verformungskomponente bestimmt. Der Multiplikator 1.33 in der Gleichung steht für die Umrechnung des linear bestimmten Verformungsverlaufs in den realen parabolischen Verlauf.

$$F_{\beta y} = F_{\beta x} * \kappa_{\beta} = (1.33 \cdot f_{sh} + f_{ma}) * \kappa_{\beta} \quad (2)$$

f_{ma}	Herstellfehler-Abweichungskomponente der Flankenlinien-Abweichung (μm)
f_{sh}	Verformungskomponente der Flankenlinien-Abweichung (linearisiert) (μm)
κ_{β}	Einlauffaktor

Die **Herstell-Komponente der Flankenlinien-Abweichung** f_{ma} wird aus den Herstelltoleranzen abgeleitet. Auch hier ergibt sich eine nennenswerte Änderung. Sofern ein übliches Vorgehen bei der Kontrolle der Verzahnungsqualität eingesetzt wird, kann folgende Formel (Gleichung 64) angewendet werden:

$$f_{ma} = \sqrt{f_{H\beta 1}^2 + f_{H\beta 2}^2}$$

Gegenüber der bisherigen Formel: $f_{ma} = \max(f_{H\beta 1}^2, f_{H\beta 2}^2)$ ergibt sich eine Vergrößerung des Wertes und damit eine Erhöhung des Breitenlastfaktors.

$f_{H\beta}$	Flankenlinien-Winkelabweichung nach ISO1328 (μm)
--------------	---

1.2.1 Breitenlastfaktoren für Planetenstufen

In der neuen Ausgabe wurden die Gleichungen zur Berechnung der Breitenlastfaktoren für Planetengetriebe weggelassen. In der Norm wird etwas lapidarisch formuliert, die Gleichungen könnten nicht für Planetengetriebe verwendet werden, sie „sind aber mit leichten Anpassungen durchaus für Planetengetriebe verwendbar“. Diese „leichten“ Anpassungen sind aber gar nicht so trivial. Vor allem können solche Ableitungen zu Diskussionen führen. In den letzten Jahren hat die Fertigung von großen Planetengetrieben deutlich zugenommen, so dass das Fehlen von Formeln genau für diesen Fall schon bedauerlich ist.

Im folgenden wird die Herleitung zur Berechnung der Breitenlastfaktoren für Planeten streng nach der Philosophie der ISO6336 beschrieben. Der Anhang D (Teil 1) der Norm beschreibt die Herleitung der Formeln, welche für ein einzelnes Zahnradpaar angewendet werden.

Die **Verformungskomponente** f_{sh} ergibt sich aus der Deformation der Wellen gepaarter Zahnräder durch Torsion und Biegung. Dabei wird zur Vereinfachung bei einer Paarung Ritzel-Rad nur die (wesentlich größere) Deformation des Ritzels betrachtet. In Anhang D der Norm wird erläutert, wie die

Verformung berechnet wird. Da nur die **Veränderung** der Verformung über der Breite interessiert, wird die Verformungskomponente am linken Ende (Ausgangspunkt) mit Null angesetzt.

Bei Planetenstufen treten folgende wesentliche Verformungen auf:

- Die Sonne hat mehrere Zahneingriffe, dadurch heben sich alle Radialkräfte auf. Die Biegung entfällt, die Verformung entsteht einzig durch die Torsion; diese ist jedoch wegen des Mehrfacheingriffes entsprechend der Anzahl Planeten ein Mehrfaches höher als bei ‚normalen‘ Ritzelwellen.
- Ein Planet hat zwei Eingriffe mit entgegengesetztem Drehmoment, dadurch entsteht keine Torsions-Verformung. Die Biegung kann wie bei Ritzelwellen berechnet werden, die Umfangskraft ist aber wegen den Eingriffen Sonne/Planet und Planet/Kranz zu verdoppeln.
- Die Deformation des Kranzes kann üblicherweise vernachlässigt werden.

Damit folgt, dass beim Eingriff Sonne/Planet die Torsion des Ritzels und die Biegung der Planetenwelle zu berücksichtigen ist, beim Eingriff Planet/Kranz nur die Biegung der Planetenwelle.

Für übliche Lagerungs-Anordnungen von Planeten wird die Biegung – analog dem Vorgehen der ISO6336 – analytisch bestimmt. Abbildung 1 zeigt die vier häufigsten Fälle.

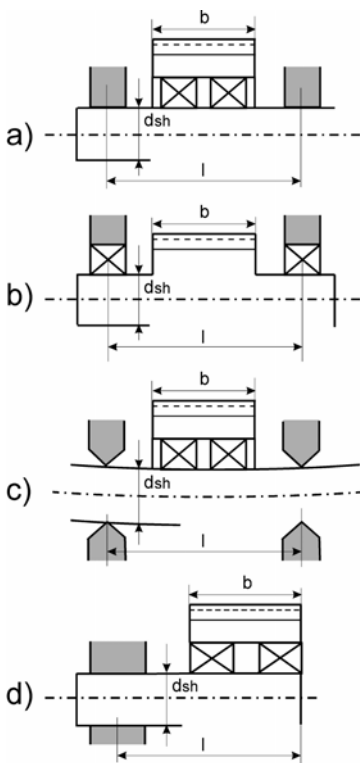


Abb. 1 : Lagerungsarten der Planeten:

- a: Planeten auf beidseitig fest eingespannten Bolzen gelagert
- b: Planeten mit Zapfen, die beidseitig im Planetenträger gelenkig gelagert sind
- c: Planeten auf beidseitig weich eingespannten Bolzen (gelenkig gelagert)
- d: Planeten auf einseitig fest eingespanntem Bolzen gelagert

Die Gleichungen 3a-d zeigen die Biege-Komponente in Abhängigkeit der Distanz x vom Beginn der tragenden Breite am Planeten. Da nur die Veränderung der Biegung über der Zahnbreite interessiert, wurde der konstante Term in den Gleichungen weggelassen, so dass $f_b(x=0)$ zu Null wird. Ähnliche Formeln finden sich in der Fachliteratur [2]. Für Fall a bis d nach Abb.1 gilt:

$$f_{bpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{F_m/b}{E_p d_{sh}^4} * [x^4 / 24 - x^3 b / 12 - x^2 b (3l - 6b + b^2 / l) / 48 + x b^2 (3l - 4b + b^2 / l) / 48] \quad (3a)$$

$$f_{bpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{Fm/b}{E_p d_{pla}^4} * [x^4 / 24 - x^3 b / 12 - x^2 b(l-b) / 8 + x b^2 (l/8 - b/12)] \quad (3b)$$

$$f_{bpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{Fm/b}{E_p d_{sh}^4} * [x^4 / 24 - x^3 b / 12 - x^2 b(l-b) / 8 + x b^2 (l/8 - b/12)] \quad (3c)$$

$$f_{bpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{Fm/b}{E_p d_{sh}^4} * [x^4 / 24 - x^3 b / 6 + x^2 b^2 / 4 + x b l (l-b) / 2] \quad (3d)$$

Die Torsionsverformung an der Sonne nach Gleichung 4 kann aus Anhang D abgeleitet werden (fi entsprechend Formel D.1).

$$f_{tso} = p \frac{8}{\pi} \frac{Fm/b}{0.39 E_{so}} * \left(\frac{b}{d_{so}}\right)^2 * \frac{x}{b} * \left(1 - \frac{x}{2b}\right) \quad (4)$$

- b Tragende Breite (Zahneingriff) (mm)
- d_{pla} Teilkreis Planet (mm)
- d_{sh} Durchmesser Planetenwelle (mm)
- d_{so} Teilkreis Sonne (mm)
- E_p Elastizitätsmodul Planetenbolzen/welle (N/mm²)
- E_{so} Elastizitätsmodul Sonne (N/mm²)
- f_{bpla} Durchbiegung Planetenwelle (mm)
- f_{tso} Torsionsverformung Sonne (mm)
- l Länge Planetenbolzen/welle (mm)
- p Anzahl Planeten
- x Distanz vom linken Ende der Zahnbreite (mm)

Um möglichst nahe bei der Methode der ISO6336 zu bleiben (und Formel 2 verwenden zu können), wird die mittlere Verformungskomponente f_{bmpla} (Biegung am Planet) und f_{tmsso} (Torsion an der Sonne) bestimmt.

$$f_{tmsso} = \frac{1}{b} \int_0^b f_{tso}(x) \cdot dx \quad f_{bmpla} = \frac{1}{b} \int_0^b f_{bpla}(x) \cdot dx$$

$$f_{bmpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{Fm/b}{E_p d_{sh}^4} * \frac{b^3}{16} * \left(-\frac{b}{5} + \frac{l}{6} + \frac{b^2}{18l}\right) \quad (5a)$$

$$f_{bmpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{Fm/b}{E_p d_{pla}^4} * \frac{b^3}{16} * \left(\frac{l}{3} - \frac{b}{5}\right) \quad (5b)$$

$$f_{bmpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{Fm/b}{E_p d_{sh}^4} * \frac{b^3}{16} * \left(\frac{l}{3} - \frac{b}{5}\right) \quad (5c)$$

$$f_{bmpla} = 2 \frac{64}{\pi} \frac{Fm/b}{E_p d_{sh}^4} * \frac{b^2}{4} * \left(\frac{b^2}{5} - b \cdot l + l^2\right) \quad (5d)$$

$$f_{tmsso} = p \frac{8}{3\pi} \frac{Fm/b}{0.39 E_{so}} * \left(\frac{b}{d_{so}}\right)^2 \quad (6)$$

Entsprechend Gleichung D.8 der Norm ergibt sich die linearisierte Verformungskomponente der Flankenlinien-Abweichung f_{sh} (in µm) nun wie folgt:

$$f_{sh} (\text{Paarung Sonne - Planet}) = 2000 \cdot (f_{tmsso} + f_{bmpla}) \quad (7)$$

$$f_{sh}(\text{Paarung Planet - Ring}) = 2000 \cdot f_{bmpla} \quad (8)$$

Damit können mit Gleichung (2) und (1) die Breitenlastfaktoren für den Eingriff Sonne-Planet und Planet-Zahnkranz bestimmt werden.

2. Berechnung der Grübchentragfähigkeit (Teil 2 der ISO6336)

Der Rechengang zur Flankentragfähigkeit enthält eine wesentliche Erweiterung beim Werkstoffpaarungsfaktor Z_w . Bei der Paarung eines harten Ritzels mit einem nicht-oberflächengehärteten Rad ergibt sich eine Verfestigung der Flanke des weichen Rades. Dieser Effekt ist seit langem bekannt und auch in der ersten Ausgabe berücksichtigt. Allerdings blieb bisher der Einfluss der Rauigkeit des Ritzels unbeachtet. Dies hat in der Praxis schon zu erheblichen Ausfällen geführt. Ein gehärtetes, ungeschliffenes Ritzel kann die Flanke des weichen Rades richtiggehend wegschmirgeln. Statt einer Aufhärtung ergibt sich dann ein beschleunigter Verschleiß. Die Rauigkeit wird nun neu berücksichtigt. Der Faktor Z_w kann nur dann größer 1.0 werden, sofern die Rauigkeit des Ritzels gering ist. Theoretisch könnte der Faktor auch kleiner 1.0 werden (bei beschleunigtem Verschleiß), dieser Effekt wird in der Norm aber explizit ausgeklammert, da er noch zu wenig erforscht ist.

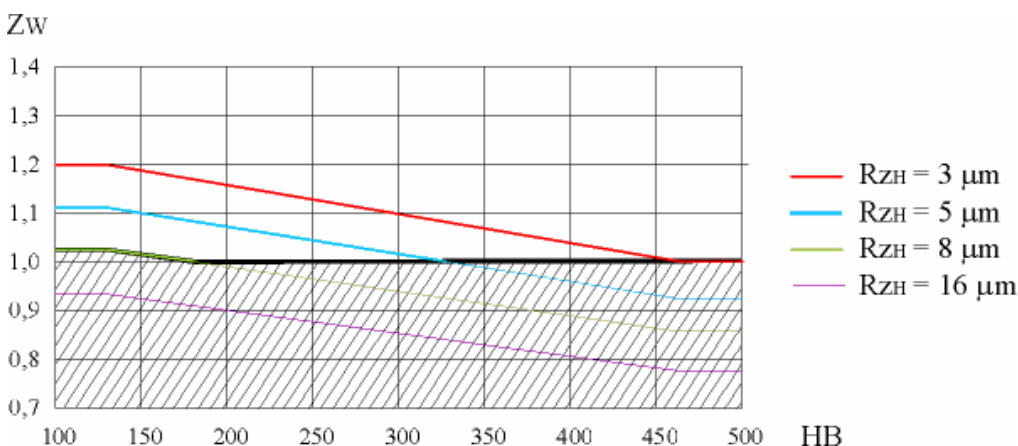


Abb. 2: Werkstoffpaarungsfaktor Z_w für die Berücksichtigung der Aufhärtung des weicheren Rades. Im schraffierten Bereich kann bei zu hoher Rauigkeit des harten Ritzels abrasiver Verschleiß entstehen.

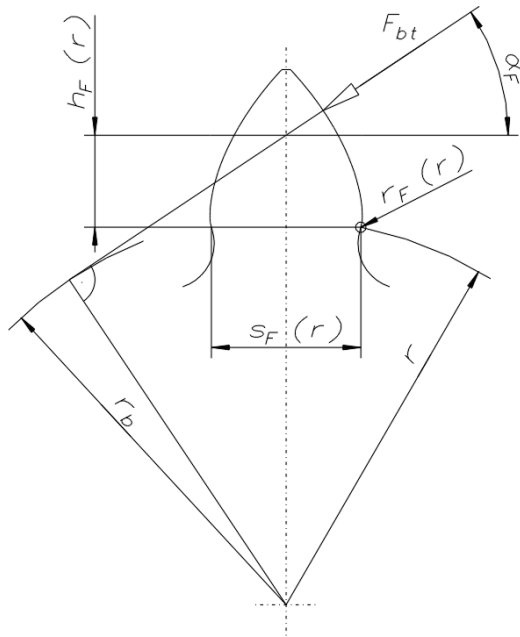
R_{ZH} : Äquivalente Bezugsrauigkeit der Radpaarung

3. Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit (Teil 3 der ISO6336)

Die neue Ausgabe von Teil 3 hatte ungewöhnlich viele Druckfehler, deshalb erschien nun im Januar 2007 eine korrigierte Ausgabe. Leider sind darin aber nur ein Teil der wesentlichen Fehler korrigiert worden!

3.1 Bestimmung der Zahnfußspannung nur noch Methode B

Bei der Berechnung des Zahnformfaktors Y_F entfällt die Methode C, bei welcher die Fußspannung vereinfacht durch Kraftangriff am Kopf bestimmt wurde. Die einzig noch verwendbare Methode B ist exakter, dabei wird die Kraft am Einzeleingriffspunkt angesetzt. Gleichzeitig entfallen auch die bisherigen Tabellen zum Auslesen von Y_F nach Methode C. Die Zahnform- und Spannungskorrektur-

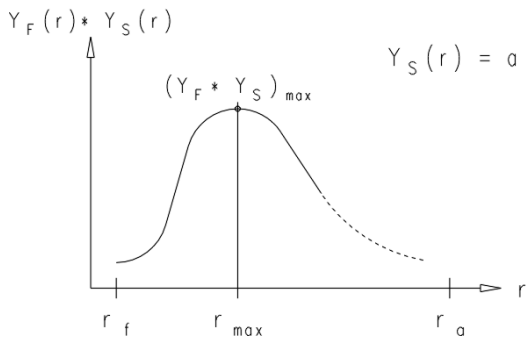


$$Y_F(r) = \frac{6 * h_F(r) * \cos(\alpha_F)}{(s_F(r))^2 * \cos(\alpha_n)}$$

$$q_s = 0,5 * s_F(r) / r_F(r)$$

$$a = 1,2 + 0,13 (s_F(r) / h_F(r))$$

$$b = 1,21 + 2,3 / (s_F(r) / h_F(r))$$



$$Y_S(r) = a * q_s^{(1/b)}$$

(fig. z-026)

Abb. 4: Herleitung der Zahnfußspannung in einem beliebigen Punkt des Fußes über $Y_F(r)$ und $Y_S(r)$ und Bestimmung des kritischen Querschnitts (r_{max})

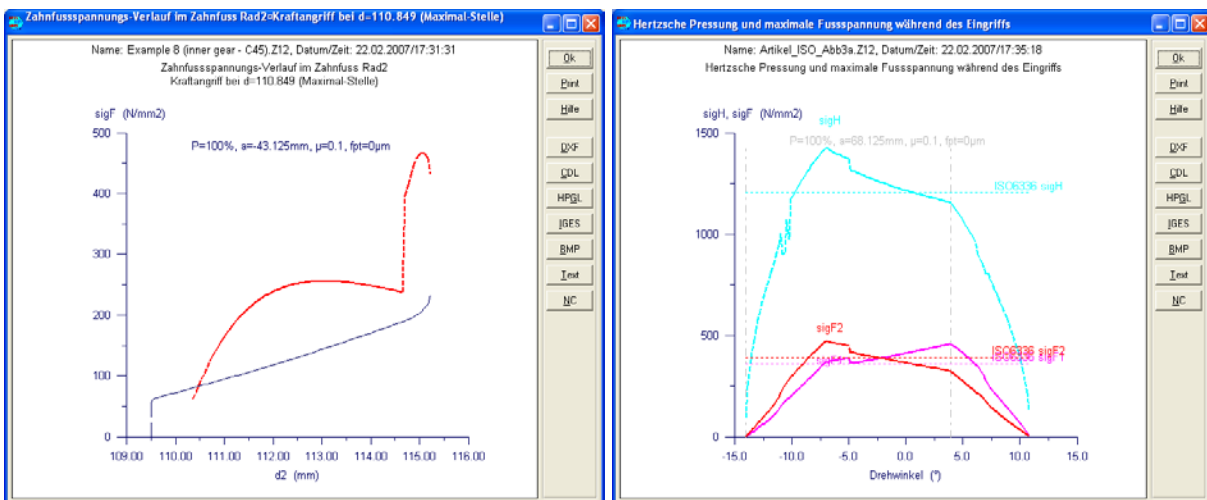


Abb. 5: Links: Verlauf der Zahnfußspannung am Innenzahnrad, berechnet mit der grafischen Methode
 Rechts: Verlauf der Hertzschen Pressung und der maximalen Fussspannungen über dem Zahneingriff

Die Abbildung 6 zeigt einen Vergleich der berechneten Fußspannungen mit den verschiedenen Rechenmethoden, welche alle mit KISSsoft durchgeführt wurden. Die genaue „grafische“ Methode, stimmt für Standard-Verzahnungen (20° Eingriffswinkel und normale Zahnhöhe) gut mit der neuen Rechenmethode der ISO6336 überein. Der Unterschied in den Resultaten, verglichen mit der Ausgabe 1996, beträgt bis zu 30%!

Angefügt kann werden, dass Zahnkränze häufig nicht anfällig sind auf Zahnbruch, da der Innenzahn einen wesentlich kräftigeren Fuß hat als ein vergleichbarer Außenzahn. Da jedoch die Anzahl hergestellter Planetengetriebe hoher Leistung stark zunimmt, ist es erfreulich, dass endlich eine präzisere genormte Rechenmethode zur Verfügung steht.

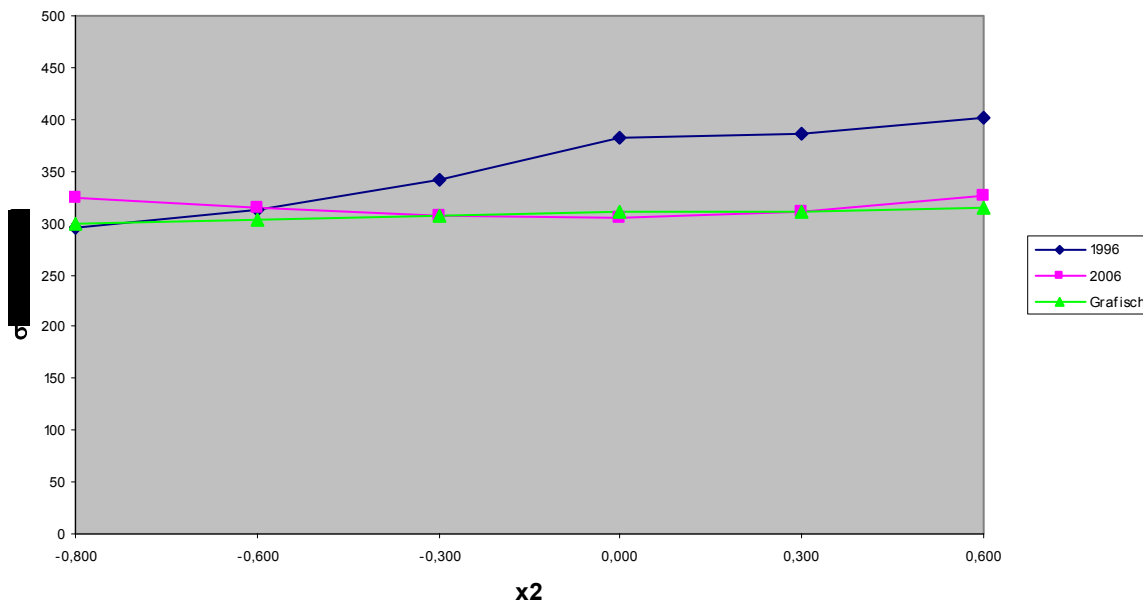


Abb. 6: Vergleich der Zahnfußspannung σ_{F0} einer Innenradpaarung mit 20:-89 Zähnen, Modul 1.25, Profilverschiebung $x_1 = 0.3$. Stossrad $z_0=29$, $x_0=0$.
 Berechnung nach a) ISO6336:1996; b) ISO6336:2006; c) Genauere ‚graphische‘ Methode (mit exakter Bestimmung der Zahnform)

3.3 Wechselbiegungsfaktor

Der Wechselbiegungsfaktor Y_M (Mean stress influence factor) wird im Anhang B neu ausführlich besprochen. In den meisten Getrieben wird ein Zahn immer auf der gleichen Seite belastet (Schwelllast). Dieser Faktor berücksichtigt die Minderung der Werkstofffestigkeit, wenn der Zahn abwechselnd auf beide Seiten gebogen wird (z.B. bei Planetenrädern). Bisher gab die Norm nur einen Anhaltswert für den Fall:

- Wechselast: $Y_M = 0.7$
- Schwellbelastung: $Y_M = 1.0$

Im Anhang B (Teil 3 der Norm) wird nun ein Hinweis auf die Bestimmung des Faktors für den allgemeinen Fall gegeben. Mit einer vom Werkstofftyp abhängigen Mittenspannungs-Empfindlichkeit M und dem Spannungsverhältnis R (welches seltsamerweise aber mit 1.2 multipliziert wird) ergibt sich Y_M für den allgemeinen Fall.

$$Y_M = \frac{1.0}{1 - R \frac{1 - M}{1 + M}}$$

R : Spannungsverhältnis

M: Mittenspannungs-Empfindlichkeit

Wegen der Abhängigkeit vom Werkstoff-Typ ergeben sich neu auch für den Fall der reinen Wechselbiegung ($R=-1$) folgende Werte (Tabelle 1).

Einsatzstahl	0.75
Einsatzstahl, kugelgestrahlt	0.70
Nitrierstahl	0.65
Flamm- oder induktionsgehärtet	0.70
Guss	0.70

Tabelle1: Wechselbiegungsfaktor Y_M bei reiner Wechsellast

3.4 Hochverzahnungs-Faktor Y_{DT}

Bei Verzahnungen mit Überdeckungen $\varepsilon_{\alpha n}$ über 2.0 verteilt sich die Umfangskraft immer auf 2 und mehr Zähne, sofern die Verzahnungsgenauigkeit sehr gut ist. Dieser Effekt wird bisher ungenügend berücksichtigt, da die Herleitung des Zahnformfaktors Y_F vom oberen Einzeleingriffspunkt ausgeht, hier jedoch bei Doppelüberdeckung an sich nur die halbe Zahnkraft anzusetzen wäre. Der neu eingeführte Faktor korrigiert diesen Mangel, kommt aber nur bei extrem guten Verzahnungsqualitäten (Qualität 4 oder besser) zur Anwendung. Unserer Erfahrung nach ergibt sich auch bei Hochverzahnungen mit Qualität 6 eine Verbesserung der Tragfähigkeit. Dieser Effekt wird leider nicht berücksichtigt.

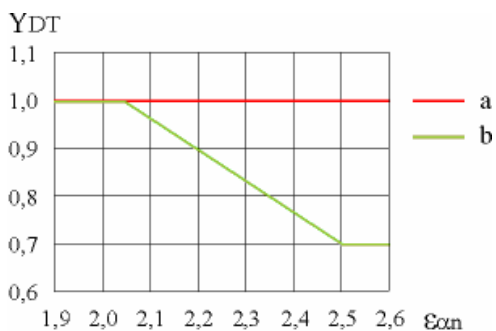


Abb. 7: Hochverzahnungs-Faktor Y_{DT} in Abhängigkeit der Überdeckung
a: Verzahnungsqualität 5 oder schlechter
b: Verzahnungsqualität 4 oder besser

3.5 Zahnkranzdicke- Faktor Y_B

Bei dünnen Zahnkränzen erhöht sich die effektive Spannung im Zahnfuß. Dieser Effekt, welcher seit längerem in der amerikanischen Methode AGMA2001 enthalten ist, wurde bisher nicht berücksichtigt. Sofern die Kranzdicke kleiner als das 1.2-fache der Zahnhöhe ist, muss dieser Effekt berücksichtigt werden. Bei sehr dünnen Zahnkränzen (unter dem 0.5-fachen der Zahnhöhe) muss mit einer genaueren Methode gerechnet werden. Hier empfiehlt sich dann in jedem Fall die Anwendung der VDI2737 [5].

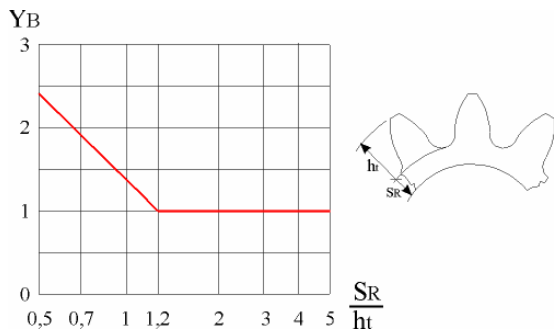


Abb. 8: Zahnkranzdicke- Faktor Y_B (hier für Aussenverzahnungen)

4. Berechnung mit Lastkollektiven (Teil 6 der ISO6336)

Zum ersten Mal ist gleichzeitig der Teil 6 der Norm erschienen. Darin wird das Vorgehen bei Festigkeitsnachweisen mit Lastkollektiven festgelegt. Dieser Teil der Norm entspricht genau dem Teil 6 der DIN3990. Es ist begrüßenswert, dass auch für Lastkollektive eine internationale Regel vorliegt. Auf eine detaillierte Besprechung kann an dieser Stelle verzichtet werden, da die DIN3990-6 bereits seit Jahren angewendet wird.

5. Ablösung der DIN3990 ?

Obwohl die hier besprochenen Änderungen in der neuen Auflage sehr wesentlich sind, bedeutet dies nicht, dass nun alle Berechnungen nach ISO6336:2006 ganz andere Resultate als bisher ergeben. Im Gegenteil, solange es sich um Außenradpaarungen von Zahnrädern gleicher Härte handelt, ändert sich im Normalfall nichts.

Die Änderungen bei Innenradpaarungen sind hingegen massiv. Da es sich um einen klaren Fortschritt zur genaueren Auslegung von Innenrädern handelt, stellt sich natürlich die Frage, ob nicht bald auch eine neue Ausgabe der DIN 3990 erscheinen wird. Wie dem Autor bekannt ist, wird vermutlich die DIN 3990 ersetzt durch die ISO 6336, was bedeuten dürfte, dass die Norm dann in deutscher Sprache als DIN ISO 6336 erscheinen dürfte.

Insgesamt ist die zweite Ausgabe der Norm ISO6336 "Berechnung der Tragfähigkeit von Stirnrädern" eine willkommene Erweiterung der Methode zur Festigkeitsberechnung von Stirnrädern. Bisher wenig oder nicht berücksichtigte Effekte sind neu miteinbezogen worden. Für die ersatzlos gestrichenen Formeln für den Breitenlastfaktor von Planetengetrieben kann mit der hier besprochenen Herleitung Ersatz gefunden werden.

Literatur

- [1] ISO6336, Calculation of load capacity of spur and helical gears, Part 1,2,3 and 6, 2006.
- [2] Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 20. Auflage, 2000. Seiten C22-C25.
- [3] siehe www.KISSsoft.ch
- [4] Obsieger, B.: Zahnformfaktoren von Aussen- und Innenverzahnungen, Konstruktion 32 (1980) S. 443-447.
- [5] VDI2737, Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit von Innenverzahnungen mit Zahnkranzeinfluss, 2005.