

Kontaktanalyse mit KISSsoft

B. Eng. Benjamin Mahr, KISSsoft AG

Bei der Auslegung neuer sowie der Nachrechnung bereits existierender Getriebe ist eine genaue Analyse der Kontaktverhältnisse im Eingriff nötig. Um dies zu bewerkstelligen, müssen moderne Berechnungsprogramme sowohl die Biegung, Torsion und Fehlmontagen der Wellen, die Absenkung bzw. die Verformung der inneren Geometrie der Lager und schliesslich die Verformung der sich im Eingriff befindlichen Zähne berücksichtigen. Dieser Artikel beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen der Kontaktanalyse nach Petersen [1] in Kombination mit einem Scheibenmodell bei gerad- und schrägverzahnten Stirnradverzahnungen welches als Grundlage der Kontaktanalyse in KISSsoft [2] dient.

Problemstellung

Während des Eingriffs kommt es durch Last zu einer Verformung des Zahns und des Radkörpers durch Biegung sowie zu einer Abplattung der Zahnkontur durch die in der Kontaktzone entstehende Hertz'sche Pressung. Diese Verformung ist auf alle sich im Eingriff befindlichen Zahnpaare verteilt. Durch die Verformung kommt es zu einer „Verlängerung“ der Eingriffsstrecke g_α

$$g_\alpha = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} + \frac{z_2}{|z_2|} \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} - a \cdot \sin \alpha_w$$

entlang der Kopfkreise der Räder – und zu einer Verschiebung des Eingriffspunktes jedes sich im Eingriff befindlichen Zahnpaars entlang der Eingriffsstecke. Dieser Effekt führt zu einer, unter Umständen „gewollten“, Erhöhung der Profilüberdeckung ε_α

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_e} = \frac{g_\alpha}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}$$

sowie zum Auftreten eines ungewollten Ein- bzw. Austrittstosses. Der Ein- bzw. Austrittstoss kann mit entsprechenden Profilmodifikationen (Kopf- und Endrücknahmen) kompensiert werden.

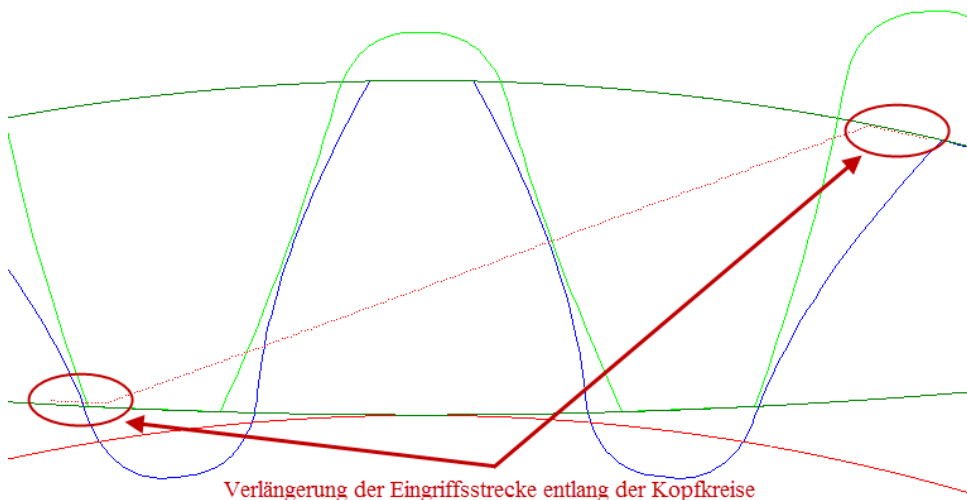


Abbildung 1 : Mittels Kontaktanalyse ermittelte Eingriffsstrecke unter Last

Durch diese Verlängerung der Eingriffsstrecke variiert auch der Normalkraftverlauf entlang der Eingriffsstrecke. Wird bei der Getriebeberechnung die Verformung, Absenkung sowie Fehlmontage der Wellen, bzw. Lager – und Teilungsfehler aus der Herstellung – berücksichtigt, verändert sich zusätzlich auch die Lastverteilung entlang der Zahnbreite, was zu einem ungünstigen Tragbild und folglich zu einer verringerten Lebensdauer des Getriebes führen kann. Um dieses Verhalten eingehend analysieren zu können, ist eine exakte Kontaktanalyse unter Berücksichtigung all dieser Faktoren sowie etwaiger Profilkorrekturen nötig.

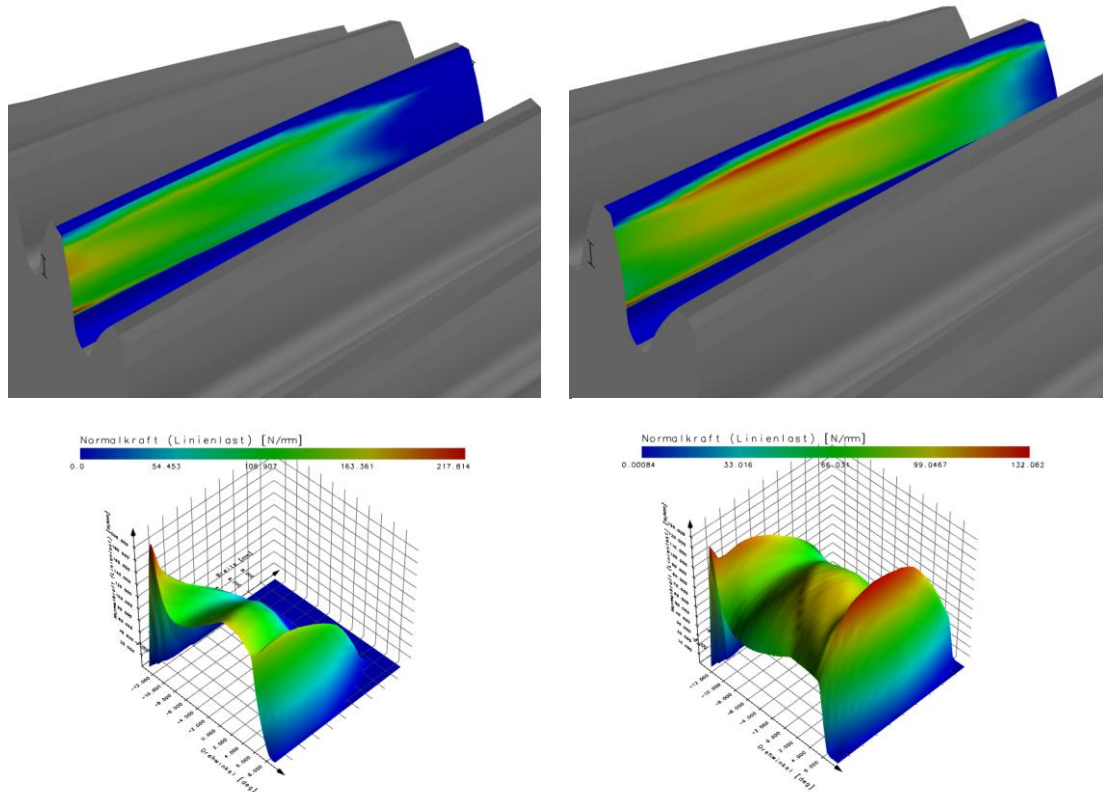


Abbildung 2 : Tragbild aus Kontaktanalyse, vor ($K_{H\beta} = 1.51$) und nach Optimierung ($K_{H\beta} = 1.15$)

Kontaktfindung

Für die Bestimmung des exakten Kontaktes eines Zahnpaars entlang der Eingriffslinie, sowohl im lastfreien Zustand als auch unter Last, lässt sich das Verfahren der Überschneidung verwenden. Hierzu werden zunächst die Zahnflanken einander angenähert, wobei sich ihre relative Position φ zueinander im Raum mit

$$\varphi_1 = \frac{-\pi}{z_1} + i \cdot \frac{2\pi}{z_1 \cdot n} - j \cdot \frac{2\pi}{z_1} + f_{pt}$$

im Bereich $0 < j < \frac{z_1}{2}$ für Rad 1, und für Rad 2

$$\varphi_2 = -\pi + \frac{\pi}{z_2} - \frac{\varphi_1 \cdot z_1}{z_2} + \Delta\varphi + j \cdot \frac{2\pi}{z_1}$$

im Bereich $0 < j < \frac{z_1}{2}$ bestimmt.

Es gilt für i = Berechnungsschritt, n = Berechnungsgenauigkeit (Anzahl Berechnungsschritte), j = aktueller Zahn, f_{pt} = Teilungsfehler, $\Delta\varphi$ = Ausgleich des Verdrehflankenspiels.

Dieses Verfahren der Kontaktfindung lässt sich durch die Unterteilung der schrägverzahnten Stirnräder in einzelne geradverzahnte Scheiben mit den Formeln

$$\varphi_{S1} = \varphi_1 + \frac{2 \cdot b_g}{d_1} \cdot \tan \beta \cdot \frac{S - S_m}{S_{Gesamt}}$$

für Rad 1 und

$$\varphi_{S2} = \varphi_2 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \varphi_{S10}$$

für Rad 2 übertragen.

Es gilt für b_g = Gemeinsame Zahnbreite, d_1 =Teilkreisdurchmesser, S = aktuell zu berechnende Zahnscheibe, S_m = Zahnscheibe bei halber Zahnbreite, S_{Gesamt} = Anzahl Zahnscheiben des Modells, φ_{S10} = Position Rad 1 mit Zahnscheibe S bei $\varphi_1 = 0$.

Mit dieser ersten Kontaktfindung, in der aktuellen Position beider Räder innerhalb eines Eingriffszyklus, lassen sich die exakten Positionen der einzelnen Kontaktpunkte sowie die genaue Anzahl der Zahnpaare im Eingriff im lastfreien Zustand finden. Die Anzahl der Zahnpaare im Eingriff oszilliert während eines Eingriffszyklus zwischen Minimal- und Maximaler Eingriff (beides immer ganzzahlig) und kann sich unter Last unter gewissen Umständen erhöhen (theoretische Profilüberdeckung nahe unter der nächsthöheren ganzen Zahl, z.B. $\varepsilon_\alpha = 1.95$, hohe Belastung und folglich hohe Deformation der sich im Eingriff befindlichen Zahnpaare). Das Wissen über die exakte Zahl der sich im Eingriff befindlichen Zahnpaare ist für die Aufstellung des Steifigkeitsmodells und des daraus folgenden Gleichungssystems nach Petersen [1] essentiell, welches für jede Scheibe (bei schrägverzahnten Stirnrädern) des Zahnradpaars gelöst werden muss. Ist für die einzelne Scheibe das Gleichungssystem ermittelt, werden die Scheiben im Anschluss mit der Steifigkeit C_c gekoppelt und die durch das Scheibenmodell gegebene Kopplungsmatrix gelöst. Der Prozess des Lösens des Gleichungssystems der Scheiben sowie des Lösens der Kopplungsmatrix ist ein iterativer Prozess und wird solange ausgeführt, bis die Differenz der resultierenden Deformation kleiner als ein Schwellenwert wird. Während dieses iterativen Prozesses wird in jeder Position eine erneute Bestimmung des Kontaktpunktes unter Berücksichtigung der Gesamtverformung δ durchgeführt.

Steifigkeitsmodell einer Scheibe

Für Schrägverzahnungen kann die Steifigkeitsberechnung nach Petersen um ein Scheibenmodell erweitert werden. Für jede der n Scheiben wird sowohl die Steifigkeit als auch die Verschiebung des Kontaktpunktes entlang der Eingriffsstecke berechnet.

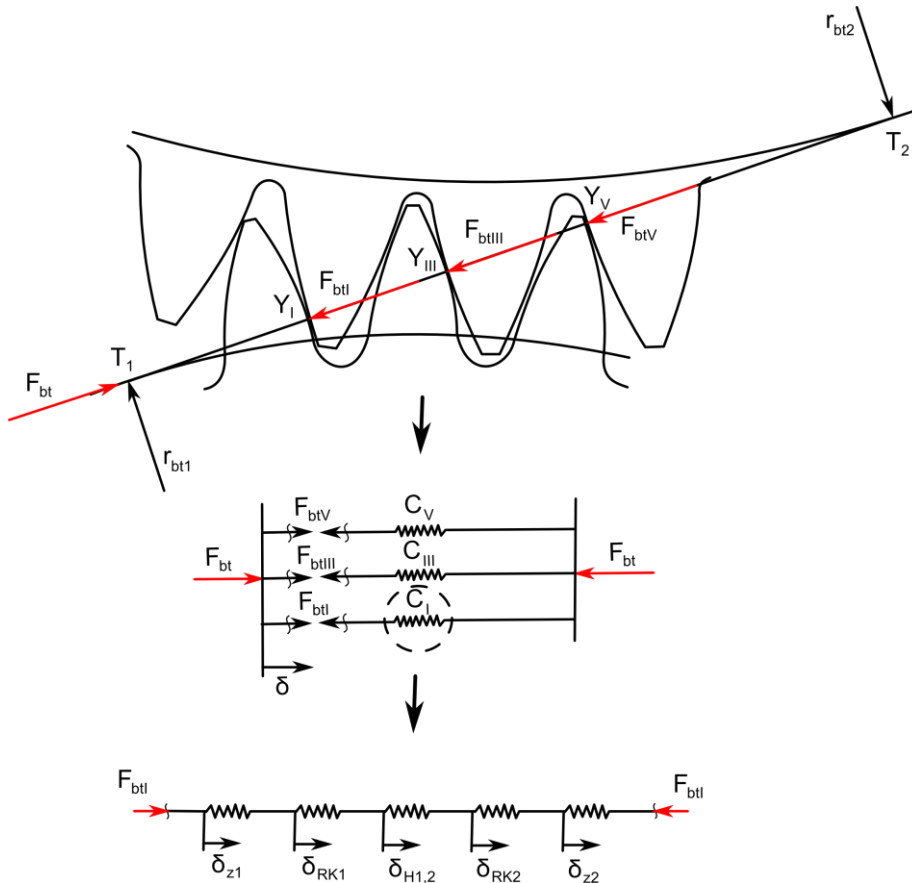


Abbildung 3 : Steifigkeitsmodell einer einzelnen Scheibe nach Petersen

Das Steifigkeitsmodell nach Petersen für eine einzelne Scheibe wird aus der Gesamtverformung δ entlang der Eingriffslinie berechnet. Für die Gesamtverformung δ gilt

$$\delta = \delta_{z1} + \delta_{RK1} + \delta_{H1,2} + \delta_{RK2} + \delta_{z2}$$

und für die Gesamtsteifigkeit C_{Pet} einer Scheibe gilt

$$\frac{1}{C_{Pet}} = \frac{1}{C_{z1}} + \frac{1}{C_{RK1}} + \frac{1}{C_{H1,2}} + \frac{1}{C_{RK2}} + \frac{1}{C_{z2}}$$

mit den Indizes z1/2 = Zahn Rad 1/2, RK1/2 = Radkörper 1/2 und H1,2 = Hertz'sche Abplattung.

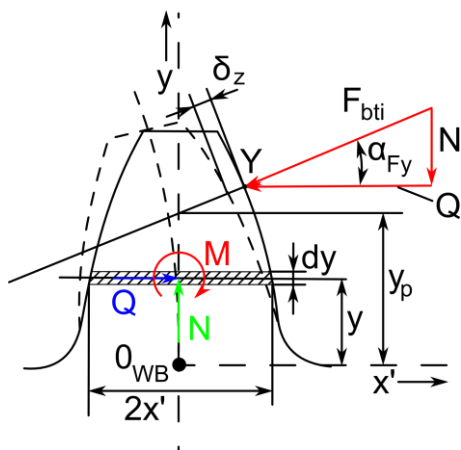


Abbildung 4 : Biegung des Zahns

Die Verformung des Zahns δ_z berechnet sich aus

$$\delta_z = \frac{F_{bti}}{b} \cos^2(\alpha_{Fy}) \frac{1-\nu^2}{E} \left[12 \int_0^{y_p} \frac{(y_p - y)^2}{(2x')^3} dy + \left(\frac{2,4}{1-\nu} + \tan^2(\alpha_{Fy}) \right) \int_0^{y_p} \frac{dy}{2x'} \right]$$

wobei sich die Integrale $\int_0^{y_p} \frac{(y_p - y)^2}{(2x')^3} dy$ und $\int_0^{y_p} \frac{dy}{2x'}$ nur numerisch lösen lassen, falls Modifikationen vorhanden sind, für deren Anschlusskurven keine Funktionen aufstellen lassen. Gleiches gilt auch für die Fussanschlusskurve.

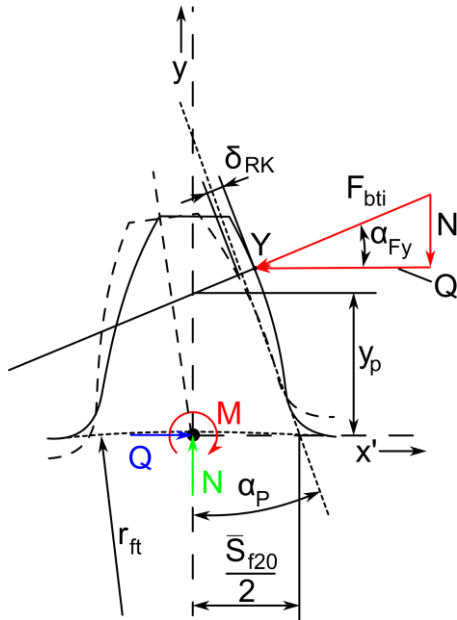


Abbildung 5 : Verformung des Radkörpers

Die Verformung des Radkörpers δ_{RK} berechnet sich aus:

$$\delta_{RK} = \frac{F_{bti}}{b} \cos^2(\alpha_{Fy}) \frac{1-\nu^2}{E} \left[\frac{18}{\pi} \frac{y_p^2}{s_{f20}^{-2}} + \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{y_p}{s_{f20}} + \frac{4,8}{\pi} \left(1 + \frac{1-\nu}{2,4} \tan^2(\alpha_{Fy}) \right) \right]$$

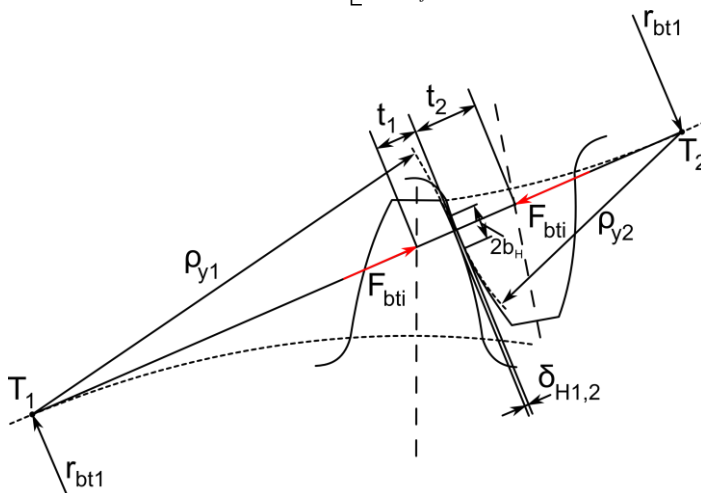


Abbildung 6 : Hertz'sche Abplattung der Kontaktzone

Die Hertz'sche Abplattung δ_H berechnet sich aus:

$$\delta_H = \frac{F_{bii}}{\pi \cdot b_g} \left[\left| \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \ln \left(\frac{b_H^2}{4t_1^2} \right) + \frac{\nu_1(1+\nu_1)}{E_1} \right| + \left| \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \ln \left(\frac{b_H^2}{4t_2^2} \right) + \frac{\nu_2(1+\nu_2)}{E_2} \right| \right]$$

mit

$$b_H = \sqrt{\frac{4 F_{bii}}{\pi b_g} \frac{\rho_{y1} \cdot \rho_{y2}}{\rho_{y1} + \rho_{y2}} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}$$

wobei b_g = die gemeinsame Breite von Rad 1 und 2 ist.

Nach Zerlegen der drei Funktionen δ_z , δ_{RK} und δ_H in Faktoren (a_1 bis a_{10}) und Substitution in $\delta = \delta_{z1} + \delta_{RK1} + \delta_{H1,2} + \delta_{RK2} + \delta_{z2}$ erhalten wir die Gesamtverformung δ mit

$$\delta = F_{bii} (a_1 + a_2 + |a_3 \cdot \ln(F_{bii} \cdot a_4) + a_5| + a_6 + a_7 + |a_8 \cdot \ln(F_{bii} \cdot a_9) + a_{10}|)$$

Neben den linearen Komponenten aus Zahnbiegung und Verformung des Radkörpers ist durch die Hertz'sche Abplattung auch ein nichtlinearer Anteil $F_{bii} \cdot a \cdot \ln(F_{bii} \cdot a)$ enthalten. Zur Lösung dieser nichtlinearen Gleichung wird eine Taylor-Reihen-Entwicklung verwendet, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0)$$

Damit ergibt sich für die Gesamtverformung $\delta_i(F_{bii})$ mit

$$f(x_0) = \delta_i(F_{bii0}), \frac{x-x_0}{1!} = \Delta F_{bii} \text{ und } f'(x_0) = \delta_i'(F_{bii0}) \text{ die Formel:}$$

$$\delta_i(F_{bii}) = \delta_i(F_{bii0}) + \delta_i'(F_{bii0}) \Delta F_{bii}$$

Es muss also für jede Scheibe in jedem Kontaktpunkt sowohl die Funktion $\delta_i(F_{bii0})$ mit der Schätzkraft $F_{bii0} = F_{bt'}$ (Zahnpaare im Eingriff) als auch die Ableitung $\delta_i'(F_{bii0})$ gelöst werden.

Wird nun für den Index i der Eingriffspunkt auf der Eingriffslinie gesetzt, lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen, welches in Abhängigkeit von Minimal- und Maximaleingriff die Gesamtverformung δ_i einer Scheibe berechnet.

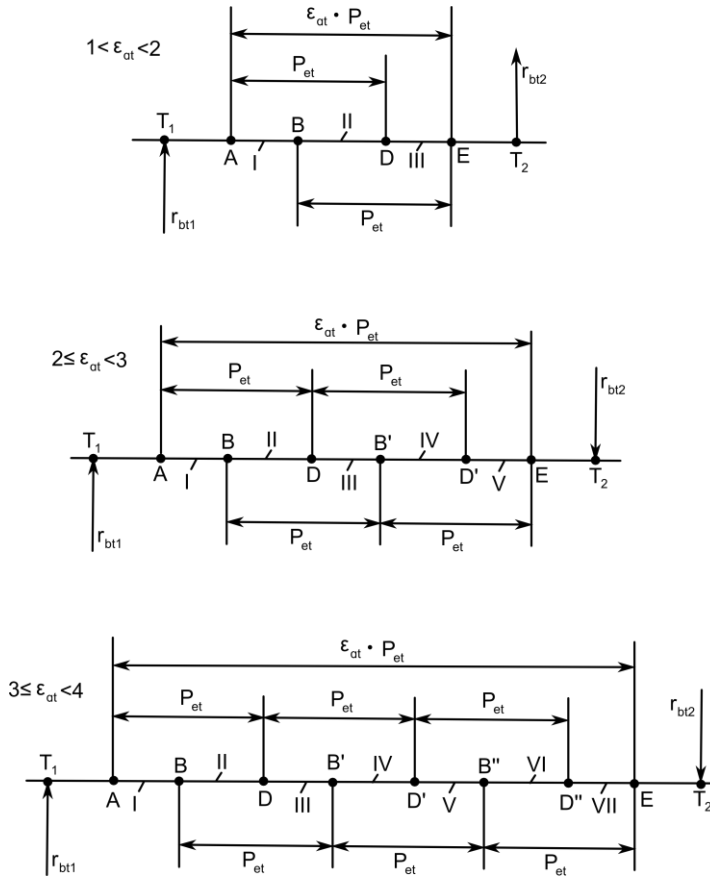


Abbildung 7 : Eingriffslinien bei verschiedenen Überdeckungen und ihre zugehörigen Indizes (I bis VII)

Gleichungssysteme

Aus obigen Überlegungen lässt sich für die Berechnung der Verformung einer Scheibe folgendes Gleichungssystem für n Zahnpaare im Eingriff herleiten:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & \\
 -\delta_1'(F_{bt10}) & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & -\delta_2'(F_{bt20}) & 0 & \vdots & \\
 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\delta_n'(F_{btm0}) &
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
 \Delta F_{bt1} \\
 \delta \\
 \Delta F_{bt1} \\
 \vdots \\
 \Delta F_{btm}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 F_{bt} - F_{bt1} - \dots - F_{btm} \\
 \delta_1(F_{bt1}) \\
 \delta_1(F_{bt1}) \\
 \vdots \\
 \delta_n(F_{btm})
 \end{bmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem wird für jede Scheibe gelöst und solange iteriert, bis ΔF_{bt1} bis ΔF_{btm} einen Schwellenwert erreichen (im Idealfall 0). Als Resultat erhalten wir die Gesamtverschiebung

δ_i , mit welcher über $C_{Pet i} = \frac{F_{bt}}{\delta_i}$ die Steifigkeit der Scheibe i bestimmt wird.

Um die unterstützende Steifigkeit der einzelnen Scheiben untereinander zu berücksichtigen, wird die Kopplungssteifigkeit C_C mit

$$C_C = f \cdot A_{sec}^2 \cdot C_{Pet}$$

mit $A_{sec} = \text{Anzahl Scheiben}$ eingeführt und über die Funktion f angepasst. Des Weiteren sorgt in KISSsoft eine interne Routine dafür, dass eine unendlich hohe Anzahl Scheiben die Kopplungssteifigkeit nicht ins Unendliche steigen lässt.

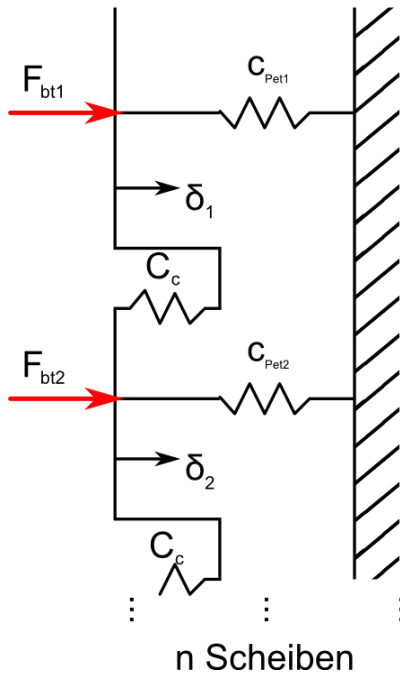


Abbildung 8 : Kopplungsmodell

Das entsprechende Gleichungssystem, welches die Gesamtsteifigkeit der einzelnen Scheiben als auch deren Kopplungssteifigkeit berücksichtigt, sieht folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix}
 C_{Pet1} + C_c & -C_c & 0 & 0 \\
 -C_c & C_{Pet2} + 2C_c & -C_c & 0 \\
 0 & -C_c & \ddots & -C_c \\
 0 & 0 & -C_c & C_{Petn} + C_c
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{bt1} \\ F_{bt2} \\ \vdots \\ F_{btm} \end{bmatrix}$$

Mit den resultierenden Verformungen δ_1 bis δ_n lassen sich während des Iterationsprozesses wiederum die Verformungen der einzelnen Scheiben abgleichen, bis sich ihre Differenz gegen einen Schwellenwert bewegt (im Idealfall 0).

Fazit

Mit dem dargestellten, flexiblen Berechnungsverfahren lassen sich die Kontaktverhältnisse während des Eingriffs effektiv ermitteln. Das Steifigkeitsmodell nach Petersen ermöglicht eine präzise Berechnung der Gesamteingriffssteifigkeit sowie der Verschiebung des Eingriffspunktes entlang der Eingriffslinie. Das Scheibenmodell erweitert die Berechnung auf Schrägverzahnungen oder Stirnräder mit ungleicher Zahnbreite. Somit lassen sich das Tragbild, die Normalkraftverteilung über der Zahnflanke bzw. deren Verlauf entlang der Eingriffsstrecke und die Verteilung der Hertz'schen Pressung mit KISSsoft realitätsnah berechnen und beurteilen.

Literaturhinweis

[1] Fakultät Maschinenbau TU Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Dr.-Ing. Detlev Petersen: Auswirkung der Lastverteilung auf die Zahnfußtragfähigkeit von hochüberdeckenden Stirnradpaarungen, 1989

[2] KISSsoft, www.kisssoft.ag