Kritische Drehzahlen von Wellen in der Praxis

Dipl.-Ing. Jürg Langhart, Dipl.-Ing. Ioannis Kaliakatsos, KISSsoft AG

Die Berechnung der Eigenfrequenzen bildet einen wichtigen Aspekt in der Wellenberechnung. Gerade bei relativ langen Wellen mit grossen Massen – wie sie beispielsweise bei Rührern, Lüftern oder Pumpen vorkommen – kann die Eigenfrequenz mit der Betriebsfrequenz zusammenfallen, wobei es in der Folge zu Resonanzerscheinungen kommen kann. Aus diesem Grund muss in kritischen Anwendungen die Eigenfrequenz bereits während der Konstruktion geprüft werden, um ein Aufschwingen der Welle und damit einhergehende extreme Belastungen zu vermeiden. Hierzu bieten die klassische Mechanik und analytische Berechnung gute Grundlagen, welche neben den Festigkeiten sowie Lagerlebensdauern bereits präzise Resultate zu den Eigenfrequenzen liefern, wie eine durchgeführte Nachmessung auf dem Prüfstand belegt.

Balkenmodell und weitere Einflüsse der Wellenberechnung

Für die Beschreibung querschwingender Balken wird entweder die Theorie des Euler-Bernoulli-Balkens oder diejenige des Timoshenko-Balkens herangezogen. Beim Euler-Bernoulli-Balken wird die Durchbiegung mit schubstarren Elementen gerechnet, während der Timoshenko-Balken Schubverformungen berücksichtigen kann – was in den infinitesimalen Elementen einen Winkel zwischen dem Schnitt und der Biegelinie bewirkt und somit zu einer etwas grösseren Durchbiegung führt. Als Faustformel gilt hierbei, dass ein Balken mit einem Verhältnis von Länge-zu-Durchmesser von mehr als zehn gut durch den Euler-Bernoulli-Balken beschrieben ist. Dagegen ist bei einer eher kürzeren, dickeren Welle – wie sie im Getriebebau üblich ist – der Timoshenko-Balken vorzuziehen, was schliesslich auch zu besser mit Messungen übereinstimmenden Ergebnissen führt. Der Timoshenko-Balken nimmt – aufgrund eines zweiten Freiheitsgrades der infinitesimalen Balkenelemente – jedoch auch einen höheren Berechnungsaufwand in Anspruch. Bild 1 zeigt zum Vergleich die Durchbiegung bei Verwendung der Balkenmodelle nach Euler-Bernoulli-Theorie und Timoshenko-Theorie.

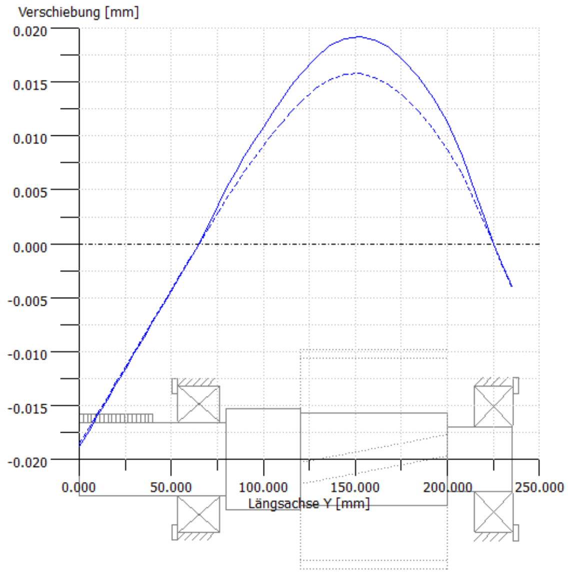


Bild 1: Durchbiegung der Welle beim Euler-Bernoulli- (gestrichelte Linie) oder Timoshenko-Balkenmodell (durchgezogene Linie)

Schwingungsberechnung

Im Folgenden soll die Differentialgleichung für den Euler-Bernoulli-Balken genauer betrachtet werden, die lautet:

$$EI_y \frac{\partial^4 z(y,t)}{\partial y^4} + \rho Q \frac{\partial^2 z(y,t)}{\partial t^2} = 0$$

Q Querschnitt
I_y Flächenträgheitsmoment
E E-Modul
ρ Dichte

Die Berechnung der Schwingung erfolgt über zwei grundsätzliche Komponenten. Der erste Term stellt die Steifigkeit dar, der zweite Term widerspiegelt die Masse.

In KISSsoft wird für die Wellenberechnung (Durchbiegung, Spannung, Eigenschwingung und Knicken) ein FE-Kern verwendet, welcher dieses Gleichungssystem löst. Dabei gründet der FE-Kern ebenfalls auf dem eindimensionalen Balkenmodell nach Euler-Bernoulli oder Timoshenko wie die klassische Mechanik, sodass dieselben Resultate erzielt werden.

Für den Anwender ist von Relevanz, dass bei der üblichen Schwingungsberechnung keine Dämpfung berücksichtigt wird. Die Dämpfung ist ein benötigter Parameter für die Berechnung der Amplitude, also des Ausschlags der Schwingung, hat aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Eigenfrequenz. Der Konstrukteur erhält also keine Aussage über die Höhe des Schwingungsausschlages.

Lineare versus nicht-lineare Berechnung

Eine weitere physikalische Eigenschaft der Wellen besteht darin, dass sich beispielsweise die Steifigkeitswerte unter hohen Belastungen verändern können. Die Steifigkeitswerte verhalten sich somit nicht-linear, was sich in KISSsoft auch optional berücksichtigen lässt. Hierbei werden für die Berechnung der Steifigkeit sowie von weiteren Grössen zusätzliche Terme mit zweiter Ordnung verwendet. Die nicht-lineare Komponente macht sich deutlich bemerkbar, wenn beispielsweise eine Welle stark gedehnt wird, sodass durch diese Dehnung eine zusätzliche Zugspannung und höhere Steifigkeit entstehen. Die erhöhte Steifigkeit wiederum verändert die Eigenfrequenz.

In der Praxis des Maschinenbaus ist dieser obige Effekt nur sehr selten von Bedeutung, der Einfluss lässt sich jedoch an einer mehr oder weniger stark gedehnten „Gitarrensaite“ beispielhaft zeigen. Eine Stahlwelle mit Durchmesser d=2 mm und einer Länge von L=800 mm wird über eine allgemeine Lagerung um etwa 14 mm gedehnt. Bei der Berechnung mit linearem Steifigkeitswert ändert sich die Eigenfrequenz nicht und bleibt unverändert bei 6.3 Hz, hingegen ist bei einer nicht-linearen Berechnung die Eigenfrequenz der ersten Biegeschwingung auf 440 Hz erhöht. Dieser Vorgang wird musikalisch beim Stimmen einer Gitarrensaite angewandt, was dem Ton ‚a‘ entspricht (Bild 2).

Bild 2a: sehr lange Welle mit linearer und nicht-linearer Berechnung

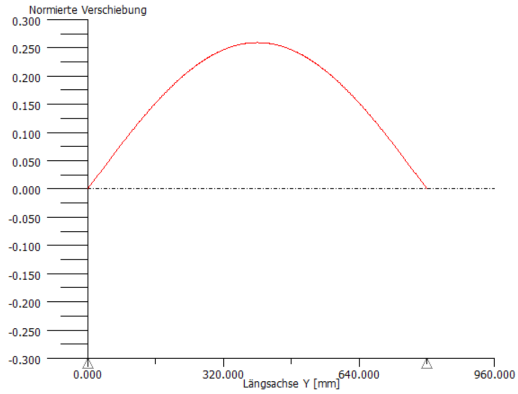


Bild 2b: erste Eigenform der Biegeschwingung

Eigenschwingungen werden in Biege- oder Dreheigenschwingungen unterteilt. Für die Berechnung von Biegeeigenschwingungen haben Durchbiegungen aufgrund statischer Kräfte – wie beispielsweise beim Riemenzug – keinen Einfluss, wobei hingegen Massen in die Berechnung miteingehen. Dem Konstrukteur steht mit dem Berechnungsprogramm KISSsoft die Möglichkeit offen, die Kräfte auch ausserhalb der Welle zu positionieren und zudem der Zusatzmasse die entsprechenden Eigenschaften wie die Rotationsträgheitsmomente in axialer sowie in beiden radialen Richtungen mitzugeben.

Der Kreiseleffekt

Einen weiteren Einfluss auf die Eigenfrequenz hat der Kreiseleffekt. Der Kreiseleffekt berücksichtigt die Trägheit gegen Drehung um radiale Achsen, was einem Widerstand gegen das Verkippen der Welle gleichkommt. Die Berücksichtigung des Kreiseleffekts in der Berechnung bewirkt, dass die Eigenfrequenz von der Drehzahl der Welle abhängt. Die Eigenbewegung der Welle kann zudem in der Gegen- oder gleichen Richtung wie die Wellendrehrichtung sein, was mit „Gegenlauf“ oder „Gleichlauf“ benannt wird. Da die Wirkung des Kreiseleffektes im Fall des Gleichlaufs gleichbedeutend mit einer höheren Steifigkeit der Welle ist, nimmt die Eigenfrequenz bei Erhöhung der Drehzahl zu. Im Fall des Gegenlaufs führt der Kreiseleffekt zu einer niedrigeren Wellensteifigkeit – demzufolge nimmt die Eigenfrequenz bei Erhöhung der Drehzahl ab.

In Bild 3 werden am Beispiel des „Jeffcott“- oder „Laval“-Läufers die Eigenfrequenzen bei Gegenlauf oder Gleichlauf in einem Campbell-Diagramm über den Drehzahlbereich dargestellt, einmal mit und einmal ohne Kreiseleffekt. Der „Jeffcott“- oder „Laval“-Läufer sowie der Einfluss des Kreiseleffekts wurden im englischsprachigen Fachartikel „A practical review of rotating machinery critical speeds and modes” (Autoren Swanson E., Powell C. D., Weismann S., Journal of Sound and Vibration, 2005, Vol. 39, No. 5, p. 10-17) dokumentiert.

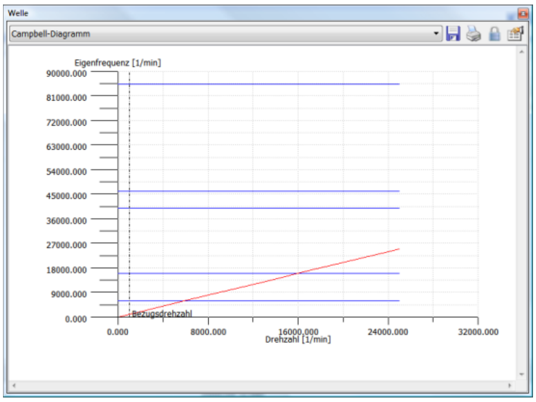


Bild 3a: Eigenfrequenzen ohne Kreiseleffekt

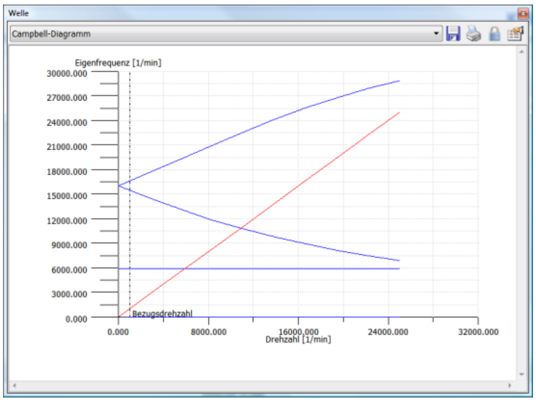


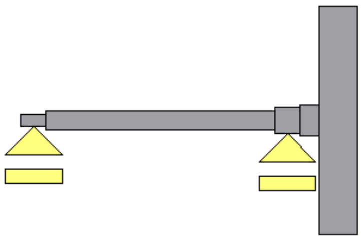
Bild 3b: Eigenfrequenzen mit Kreiseleffekt

Einfluss der Lagersteifigkeit auf die Schwingungsberechnung

Da in die Schwingungsberechnung auch die Steifigkeiten miteingehen, üben die Lagersteifigkeiten einen grossen Einfluss auf die Berechnungen der kritischen Drehzahlen aus. Die Lagersteifigkeiten lassen sich in KISSsoft entweder nach der ISO/TS 16281 rechnen oder es können auch eigene Werte vorgegeben werden. Eine grössere Lagersteifigkeit hat grundsätzlich eine Erhöhung der Eigenfrequenz (und somit der kritischen Drehzahl) zur Folge.

Die Modellierung der Lager und deren Einfluss auf die Eigenfrequenzberechnung, hängt von der Lagerberechnungsmethode ab. Bei der Berechnung nach ISO 281, die oft auch „klassische Methode“ genannt wird, ist die Verschiebung des Lagers nur von den Kräften abhängig, welche auch in die gleiche Richtung wirken: Eine Radialkraft übt also keinen Einfluss auf die axiale Richtung aus, sondern nur auf die radiale Richtung. In diesem Fall werden die Biegeeigenschwingungen unabhängig von den Axialschwingungen berechnet. Im Gegensatz dazu wird bei Verwendung der Referenzmethode nach ISO/TS 16281, wo die innere Geometrie des Lagers berücksichtigt wird, die Wirkung der Axialkraft mit den Radialverschiebungen gekoppelt und umgekehrt. Zusätzlich wird das Kippmoment, welches auf das Lager einwirkt, in der Eigenfrequenzberechnung berücksichtigt. Da sich die Lagersteifigkeitswerte unter Last verändern, hängen die gekoppelten Eigenfrequenzen stark vom Betriebspunkt ab.

Zusätzlich können die Lager ungleiche Steifigkeiten in horizontaler und vertikaler Richtung aufweisen (anisotrope Lager). Das folgende Beispiel zeigt eine Welle eines Saugzuggebläses mit einem fliegend gelagerten Rotor (Bild 4a), aus dem Buch „Maschinendynamik“ (Springerverlag, Erwin Krämer, S. 183-184). Im Campbell-Diagramm lässt sich die Auswirkung von ungleichen Lagersteifigkeiten gut erkennen: Bei gleichen Lagersteifigkeiten würden sich sonst die Kurven von Gleichlauf und Gegenlauf bei Stillstand (Drehzahl n = 0 upm) treffen (Bild 4b).



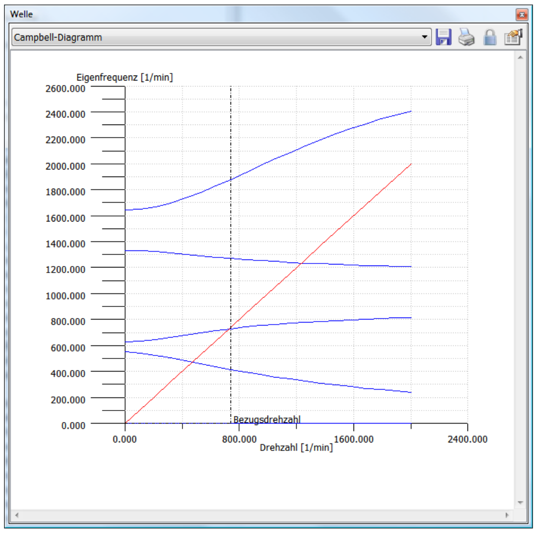


Bild 4a: Welle mit fliegend gelagerter Scheibe und anisotropen Lagerungen

Bild 4b: Campbell-Diagramm

Praktisches Beispiel – Eigenschwingungen an einer Lüfterwelle

Ein Beispiel aus der Praxis verdeutlicht die beschriebene Theorie: Die vorliegende Lüfterwelle stellt mit den Abmessungen von Länge zu Durchmesser von grösser als 10 eine biegeschwingungsempfindliche Welle dar. Der Lüfter wird über ein Kraftelement mit den Eigenschaften „Trägheitsmoment“ und „Masse“ am linken Ende dargestellt (siehe Bild 5).

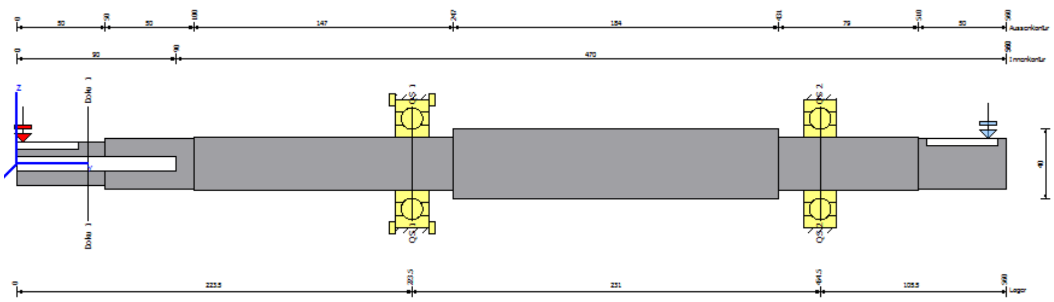


Bild 5: Lüfterwelle mit symbolisch dargestelltem Lüfterrad am linken Wellenende

Die Eigenfrequenzen der Lüfterwelle wurden in einem Prüfstand gemessen: Die Messungen fanden mittels der experimentellen Modalanalyse statt, wobei die Struktur an einer Stelle mit einem Impulshammer im Ruhezustand angeregt wurde. An mehreren Stellen der Welle wurden anschliessend mit triaxialen Beschleunigungssensoren die Beschleunigungen gemessen. Um diese Frequenzen unabhängig von der Impulskraft zu erhalten, wurden die Beschleunigungen auf die Impulskraft bezogen und ausgewertet (siehe Bild 6).

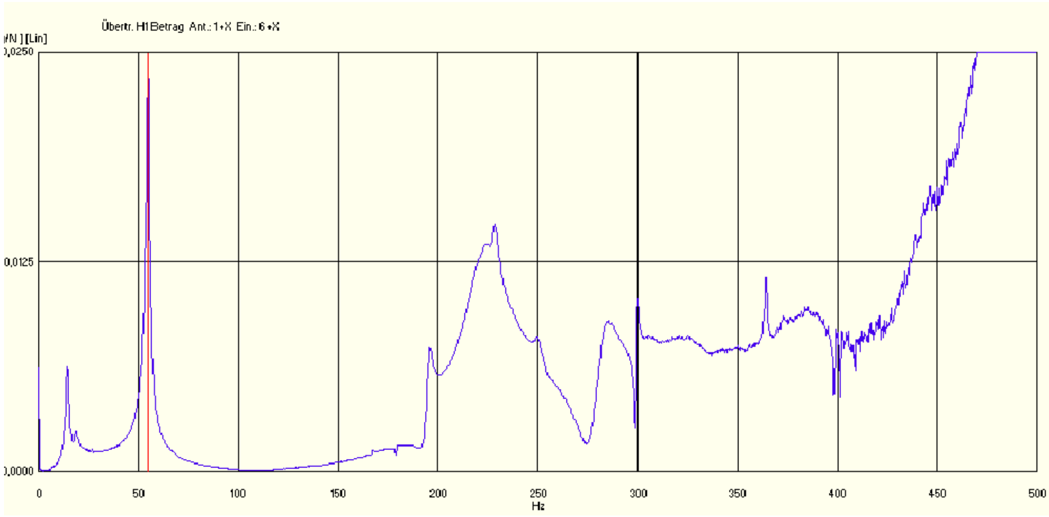


Bild 6: Messungen und Auswertung der Eigenfrequenzen einer Lüfterwelle mit einem Anschlagversuch (mit freundlicher Genehmigung der Firma Witt und Sohn, DE-Pinneberg).

Es zeigte sich, dass bei 54 Hz ein Peak gefunden werden konnte (rote Linie in Bild 6). In dem mit KISSsoft gerechneten Campbell-Diagramm lässt sich ebenfalls bei Drehzahl=0 eine Eigenfrequenz von 56 Hz feststellen, was somit eine sehr gut übereinstimmende Berechnung darstellt (Bild 7).

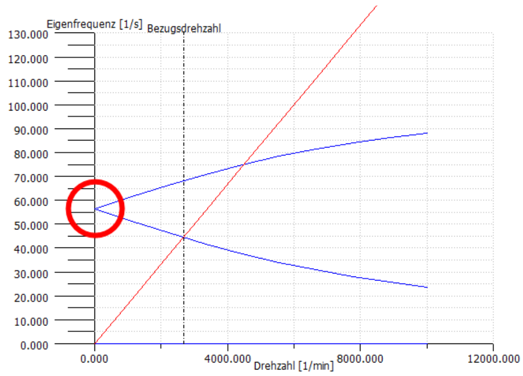


Bild 7: Campbell-Diagramm einer Lüfterwelle

Ausblick und Bilanz

Wie durch die aufgeführten Prüfstandmessungen ersichtlich wurde, konnte mit den Berechnungen der klassischen Mechanik die Eigenfrequenz einer Lüfterwelle bereits sehr gut vorab bestimmt werden.

KISSsoft bietet dem Konstrukteur die Möglichkeit, mit der selben Software von der Wellen- und Lagerberechnung auch zusätzlich die Eigenfrequenzen zu bestimmen. Die Berücksichtigung der Lagersteifigkeiten und Kreiseleffekte sowie die zusätzliche Darstellung des Campbell-Diagrammes decken die zur Verfügung stehenden klassischen Berechnungen vollumfänglich ab.