

U. Kissling, Dr. Dipl. Masch. Ing.
c/o L.Kissling Co. AG, Maschinenfabrik, Schärenmoosstr. 76, CH-8052 Zürich
Tel 0041'1'3012400 Fax 0041'1'3013984 E-Mail ulrich.kissling@KISSsoft.ch

Festigkeitsberechnung von Stirnrädern – Unterschiede zwischen ISO 6336, DIN 3990 und AGMA 2001

Nach äusserst langen Bemühungen wurde vor drei Jahren endlich die Festigkeitsberechnung von Stirnrädern als ISO 6336 [1] normiert. Erstaunlich ist, dass diese Norm bisher auch in Fachkreisen weitgehend unbekannt ist.

Ein Grund dafür kann sein, dass sich – zumindest in Europa – mangels einer ISO-Norm die DIN 3990 [2] für die Festigkeitsberechnung von Zahnrädern generell durchgesetzt hat (beispielsweise in Großbritannien oder Italien). Andererseits gibt es immer wieder Probleme, wenn von Kunden aus Nord- und Südamerika Berechnungen nach AGMA (USA-Norm) verlangt werden. Die Rechenmethode der AGMA [3] weicht sehr stark von der DIN 3990 ab. Insbesondere sind die Differenzen wegen unterschiedlicher Rechenmodelle nicht systematisch, so dass Zahnräder, die nach DIN 3990 bestens ausgelegt sind, die Anforderungen gemäss AGMA je nach der Geometrie nicht erfüllen und umgekehrt. Ausserdem weist die neueste Version der AGMA eine Besonderheit auf, die zu tiefen Zahnfuss-Sicherheiten führt und hier noch besprochen wird.

Gerade die Amerikaner haben im Rahmen der ISO-Kommission Druck gemacht, damit endlich eine ISO-Norm fertiggestellt wird. Da nun ein international gültiger Standard vorliegt, der die nationalen Vorschriften ablösen soll, ist es wichtig, diesen Standard auch anzuwenden. Die ISO 6336 ähnelt sehr der DIN 3990, was für die europäische Seite natürlich ein grosser Vorteil ist, insbesondere im Verkehr mit den USA. Allerdings wird auch heute noch in den USA fast ausschliesslich nur die Berechnung nach AGMA akzeptiert, so dass die genaue Kenntnis der wesentlichen Unterschiede zwischen diesen Normen wichtig ist.

1. Die Unterschiede zwischen ISO 6336 und DIN 3990

Die ISO 6336 ist faktisch identisch mit der DIN 3990 – mit ganz wenigen Ausnahmen. Bei einigen Faktoren für die Berechnung der zulässigen Zahnfuss-Spannung und der Flankenfestigkeit bestehen geringe Unterschiede, wodurch sich die rechnerischen Sicherheiten um höchstens 2 bis 3 % unterscheiden. Die einzige wesentliche Differenz besteht beim Ansatz der vereinfachten Wöhlerlinie (Abb.1). Der sogenannte Zeitfestigkeitsfaktor für die Fussfestigkeit wird beim Erreichen der Lastwechselzahl für Dauerfestigkeit zu 1.0 (je nach Werkstoffart, normalerweise bei $3 \cdot 10^7$ Lastwechseln). Gemäss DIN 3990 bleibt der Faktor bei höheren Lastwechselzahlen konstant, während die ISO 6336 eine Verminderung bis auf 0.85 bei 10^{10} Lastwechseln vorsieht. Dasselbe gilt für den Zeitfestigkeitsfaktor zur Flankenpressung. Dieses Konzept entspricht der heutigen Überzeugung, dass es keine eigentliche Dauerfestigkeit gibt. Der Ansatz stammt direkt aus der Vorschrift AGMA 2001, findet sich

aber auch in neuen europäischen Vorschriften. Dieser wesentliche Unterschied bewirkt bei Berechnungen von Zahnrädern im Dauerfestigkeitsbereich nach ISO 6336 als Resultat Sicherheiten, die etwa 15 % niedriger sind als die entsprechenden Werte nach DIN 3990. Allerdings darf mit ISO 6336 bei nachgewiesener optimaler Werkstoffqualität und Hersteller-Erfahrung auch der Wöhlerlinienverlauf entsprechend der DIN 3990 eingesetzt werden. Beim Vergleich von Berechnungen wird deshalb sehr empfohlen, diesen Unterschied zu beachten.

2. Unterschiede zwischen AGMA 2001-C95 und DIN 3990/ISO 6336

Die Festigkeitsberechnungen von Stirnrädern nach DIN 3990, ISO 6336 einerseits und AGMA 2001-C95 andererseits ergeben sehr unterschiedliche Resultate. Worin bestehen diese Unterschiede und wie lassen sie sich begründen?

2.1. Dynamik-, Breiten- und Stirn-Faktoren

Die Methode zur Bestimmung von Dynamik-, Breiten- und Stirn-Faktoren sind nach DIN und ISO gleich, nach AGMA jedoch ganz anders, so dass keine Übereinstimmung erwartet werden kann. Die AGMA gibt keine Formel für die Berechnung des Stirnfaktors an und schlägt 1.0 vor. Vor allem die Breitenfaktoren sind in allen Methoden sehr bedeutend, da sie ganz unterschiedlich grosse Werte, je nach Eingabedaten, haben können. Die Herleitung dieser Faktoren ist in allen Methoden recht überschlagsmässig, so dass hier keiner Methode der Vorzug gegeben werden kann. Es ist in allen Methoden erlaubt, mit vorliegender guter Begründung eigene Werte vorzugeben.

Für einen direkteren Vergleich der Rechenmethoden, ist es sinnvoll für alle diese Faktoren 1.0 vorzugeben werden. Werden die Faktoren nach den Standard-Vorgaben der Normen berechnet, so ergeben sich fallweise massive Unterschiede (siehe Tabelle 1). Die Berechnungen wurden für ein Beispiel mit den in Tabelle 2 zusammengestellten wichtigsten Parametern durchgeführt.

Bei grosser Linienlast (1150 N/mm²):

	DIN	ISO	AGMA
Dynamikfaktor	1.02	1.02	1.06
Breitenfaktor (Flanke)	1.08	1.08	1.16
Breitenfaktor (Fuss)	1.06	1.06	1.16
Stirnfaktor (Flanke)	1.03	1.07	1.00
Stirnfaktor (Fuss)	1.03	1.07	1.00

Bei kleiner Linienlast (250 N/mm²):

	DIN	ISO	AGMA
Dynamikfaktor	1.08	1.09	1.06
Breitenfaktor (Flanke)	1.49	1.49	1.16
Breitenfaktor (Fuss)	1.33	1.33	1.16
Stirnfaktor (Flanke)	1.35	1.48	1.00
Stirnfaktor (Fuss)	1.35	1.48	1.00

Tabelle 1: Vergleich von grundlegenden Faktoren

Zahnradpaar:

Normalmodul	6 mm
Schrägungswinkel	0°
Zähnezahl	25 : 76
Zahnbreite	44 / 44 mm
Achsabstand	303 mm
Profilverschiebung	0,2485 / -0,2485
Werkstoff	17CrNiMo6 / 17CrNiMo6
Drehzahl	440,8 / 145 U _p M
Leistung	175 kW

Tabelle 2: Daten der Zahnradstufe

2.2. Zahnfuss-Festigkeit

2.2.1 Auftretende Zahnfusssspannung

Der Rechenansatz für die Bestimmung des kritischen Zahnfuss-Querschnitts ist recht ähnlich (DIN/ISO legt eine 30°-Tangente an die Fusskontur, AGMA verwendet die Lewis-Parabel). Der Ansatz für den Zahnformfaktor (YF in DIN/ISO, bzw. Y in AGMA) ist nahezu identisch. Unterschiedlich ist zwar die Formel für den Spannungskorrekturfaktor (YS in DIN/ISO, bzw. Kf in AGMA), die Resultate sind aber ähnlich. Zwischen dem jeweiligen Resultat (YF*YS, bzw. 1/J) besteht keine grosse Differenz. Ein wesentlicher Unterschied betrifft den Überdeckungsfaktor Yeps. Dieser ist bei DIN/ISO für geradverzahnte Stirnräder ungefähr 0.75 (bei $\text{eps.a} = 1.5$), bei AGMA gibt es diesen Faktor nicht. Damit sind die ausgewiesenen Spannungen nach DIN/ISO etwa 25% tiefer. Für LACR-Räder (schrägverzahnt mit $\text{eps.b} \leq 1.0$) ist der Schrägenfaktor Zbet nach DIN/ISO kleiner 1.0, bei AGMA 1.0. Damit sind zusätzlich die ausgewiesenen Spannungen nach DIN/ISO etwa 12% tiefer.

2.2.2. Zulässige Zahnfusssspannung

Die Angaben für die Dauerfestigkeitswerte (sig.Flim) gemäss den Standard-Referenz-Prüfrädern (DIN/ISO) entsprechen recht gut den AGMA-Werten (allowable bending stress number sat). Die verschiedenen Faktoren zur Umrechnung des Dauerfestigkeitswertes in die zulässige Spannung (sig.FP) sind von der Art und der Rechenmethode her zwar unterschiedlich je nach Norm; da diese Faktoren aber alle wenig von 1.0 abweichen, ist der Einfluss gering. Ein wichtiger Unterschied besteht beim Zeitfestigkeitsfaktor (DIN:/ISO: YNT, AGMA: YN) bei Lastwechselzahlen oberhalb 3'000'000: Bei DIN bleibt der Faktor 1.0, bei ISO/AGMA reduziert sich der Wert bis auf 0.85 (bei 10^{10} Lastwechseln).

Der eindeutig grösste Unterschied besteht bei YST (Spannungskorrekturfaktor für die Abmessung der Standard-Referenz-Prüfräder). Dieser Wert beträgt bei DIN/ISO 2.0, bei AGMA gibt es ihn nicht. Die Dauerfestigkeitswerte (sig.Flim) sind an Rädern gemessen, die einen Spannungsfaktor (YST = YF*YS) von 2.0 aufweisen. Die eigentliche Festigkeit des Werkstoffs ist folglich 2*sig.Flim, beziehungsweise eben YST*sig.Flim.

Auf Grund des fehlenden Faktors YST sind die zulässigen Festigkeitswerte nach AGMA nur halb so gross wie bei DIN/ISO! Da sonst zwischen DIN/ISO und AGMA alle Daten und Rechenansätze recht gut übereinstimmen, liegt hier offensichtlich ein Fehler der AGMA vor. Wie dies in einer solch wichtigen Norm vorkommen kann, ist nicht nachvollziehbar.

2.3. Flanken-Festigkeit

2.3.1. Auftretende Pressung

Der Rechenansatz für die Berechnung der Flankenpressung ist übereinstimmend. Der einzige wesentliche Unterschied betrifft den Überdeckungsfaktor Zeps. Dieser ist bei DIN/ISO für geradverzahnte Stirnräder ungefähr 0.91 (bei $\epsilon_s.a = 1.5$), bei AGMA ist dieser Faktor (mN) 1.0. Damit sind die ausgewiesenen Spannungen nach DIN/ISO etwa 9% tiefer, bezüglich des übertragbaren Drehmoments 18% tiefer.

2.3.2. Zulässige Pressung

Die Angaben für die Dauerfestigkeitswerte (sig.Hlim) entsprechen recht gut den AGMA-Werten (allowable contact stress number sac). Die verschiedenen Faktoren zur Umrechnung des Dauerfestigkeitswertes in die zulässige Spannung (sig.HP) sind von der Art und der Rechenmethode her zwar unterschiedlich je nach Norm; da diese Faktoren aber alle wenig von 1.0 abweichen, ist der Einfluss gering. Ein wichtiger Unterschied besteht beim Zeitfestigkeitsfaktor (DIN:/ISO: ZNT, AGMA: ZN) bei Lastwechselzahlen oberhalb 10'000'000: Bei DIN bleibt der Faktor 1.0, bei ISO/AGMA reduziert sich der Wert bis auf 0.85 (bei 10^{10} Lastwechseln). Damit sind die ausgewiesenen Sicherheiten nach ISO/AGMA etwa 15% tiefer, bezüglich des übertragbaren Drehmoments 30% tiefer.

2.3.3. Interpretation der Sicherheiten

Bei der Interpretation der Sicherheiten ist zu beachten, dass der Service Factor nach AGMA proportional zum Drehmoment ist, die ausgewiesene Flankensicherheit nach DIN/ISO hingegen proportional zur Wurzel des Drehmoments. Die Sicherheiten nach DIN/ISO sind also zu quadrieren, um sie mit AGMA vergleichen zu können.

2.4. Zusammenfassung

Folgende Haupt-Parameter ergeben bei Berechnungen nach unterschiedlichen Normen höhere (+%) oder tiefere (-%) Sicherheiten (Tab.3).

Zahnfuß:	DIN	ISO	AGMA
Breitenfaktor	(*1)	(*1)	(*1)
Stirnfaktor	(*2)	(*2)	-
Überdeckungsfaktor Yeps	+25%	+25%	-
Schrägenfaktor Ybet ($0 < \epsilon_s.b \leq 1.0$)	+12%	+12%	-
Zeitfestigkeit bei $NL > 10^7$	-	-15%	-15%
Spannungskorrekturfaktor YST	-	-	-50% (!)
Flanke:	DIN	ISO	AGMA
Breitenfaktor	(*1)	(*1)	(*1)
Stirnfaktor	(*2)	(*2)	-
Überdeckungsfaktor Zeps	+18%	+18%	-
Zeitfestigkeit bei $NL > 10^7$	-	-15%	-15%

(*1): je nach Detailmethode und Eingaben 5-40%. Dieser Effekt kann aber in allen Normen übersteuert werden bei guter Begründung!

(*2): je nach Detailmethode und Eingaben 5-30%. Dieser Effekt kann aber in allen Normen übersteuert werden bei guter Begründung!

Tabelle 3: Zusammenstellung der wesentlichen Abweichung

3. Festigkeitsberechnungen in der Praxis

Um die Unterschiede von verschiedenen Rechenmethoden überprüfen zu können, sollten vergleichende Berechnungen möglichst einfach durchgeführt werden können. Die vorgenannten Untersuchungen wurden mit der Berechnungssoftware KISSsoft (Kap.5, [4]) durchgeführt. In KISSsoft sind verschiedene Rechenmethoden integriert. Diese werden in der Hauptmaske (Abb.2) über eine Auswahlliste ausgewählt. Die Festigkeit einer Verzahnung kann so durch einfaches Umschalten der Methode ohne Zusatzaufwand nach DIN 3990, ISO 6336 und AGMA 2001 überprüft werden. Für Zahnräder aus Kunststoff, die nicht mit den vorgenannten Methoden berechnet werden können, steht die Festigkeitsberechnung nach VDI 2545 zu Verfügung.

Gerade wenn eine Firma plant, die vorgeschriebene Rechenmethode z.B. von DIN 3990 auf ISO 6336 zu ändern, ist es eine grosse Hilfe, wenn ein Programm zu Verfügung steht, das auf einfachste Weise die Resultate nach beiden Methoden liefert. Damit kann die Erfahrung in der Interpretation der Ergebnisse schnellstmöglich auf die neue Methode übertragen werden.

4. Exakte Berechnung der Zahnfussspannung und Optimierung der Fussform

Der Nachweis der Zahnfussbruch-Sicherheit ist nebst der Flankensicherheit das wichtigste Thema bei der Auslegung von Zahnrädern. Alle normierten Rechenverfahren setzen hierzu Näherungsverfahren ein, die in kritischen Fällen oder bei Sonderverzahnungen (wie z. B. Hochverzahnung) grosse Abweichungen von den tatsächlichen Verhältnissen ergeben können.

4.1. Rechnerischer Ansatz für die Zahnfussspannung

Alle hier besprochenen Rechenmethoden bestimmen die Zahnfuss-Spannung über eine vereinfachte Modellierung der tatsächlichen Verhältnisse. Nach DIN oder ISO wird der kritische Querschnitt im Zahnfuss durch das Anlegen der 60°-Tangente an die Fusskontur gefunden. Je nach der effektiven Gestalt der Fussrundung wird damit ein kleinerer oder grösserer Fehler impliziert.

Eine Firma in Süddeutschland, die Getriebe für die Luftfahrttechnik entwickelt und KISSsoft (Kap.5) einsetzt, hat seit längerem festgestellt, dass mit DIN 3990 die Auslegung der Zahnräder nicht genügend exakt durchgeführt werden konnte.

In einer Veröffentlichung von B. Obsieger [6] ist bereits vor Jahren ein Ansatz für eine wesentliche Verbesserung der Rechenmethode vorgeschlagen worden. Auf Grund der effektiven Zahnform wird für jeden Punkt im Zahnfussbereich der Zahnform- (YF) und der Spannungskorrektur-Faktor (YS) berechnet und diejenige Stelle bestimmt, an der das Produkt $YF \cdot YS$ das Maximum erreicht (Abb. 6).

Der Berechnungsablauf in KISSsoft konnte geändert werden, indem (bei Wahl dieses modifizierten Verfahrens) nach der Geometrie- und vor der Festigkeitsberechnung die exakte Zahnform (auf Grund des Herstellverfahrens) bestimmt wird. Mit diesen Daten wird nach dem Ansatz von Obsieger der kritische Zahnfussquerschnitt bestimmt, wobei wahlweise der Kraftangriff am Kopf – analog Methode C der DIN 3990 – oder der Kraftangriff am Einzeleingriffspunkt – Methode B – zugrunde gelegt

werden kann. Die Festigkeitsberechnung nach DIN, ISO oder AGMA wird anschließend mit diesen spezifischen Daten vollständig durchgeführt.

Diese extrem rechenintensive Prozedur ist auf Grund der heutigen Rechnerleistungen auf einem normalen PC so schnell, dass der Programm-Benutzer kaum etwas davon bemerken kann. Noch vor 10 Jahren wäre dazu mindestens 30 Sekunden Rechenzeit benötigt worden.

Äusserst nützlich für einen grossen Anwendungskreis ist die besprochene Methode bei Innenverzahnungen. Das rechnerische Modell der DIN 3990 und der ISO 6336 ist für diesen Fall sehr dürrtig und ergibt in den meisten Fällen grosse Abweichungen von den effektiven Verhältnissen. Die AGMA 2001 (beziehungsweise die AGMA 908-B89) gibt gar keine Methode für die Zahnfussberechnung von Innenverzahnungen an, sondern verweist nur auf den möglichen Nachweis mit dem Ausmessen aus der Zeichnung des Zahns.

4.2. Zahnfuss-Optimierung

Bei Zahnrädern, die im Abwälzverfahren hergestellt werden, wird die Fussrundung durch den Kopfbereich des Werkzeugs und die Werkzeugbewegung beim Abwälzen gegeben. Spannungsanalysen zeigen, dass durch eine geschickte Modifikation die Spannungsspitzen wesentlich reduziert werden können. Mit dem zuvor besprochenen Ansatz nach Obsieger kann der Effekt von Zahnfussmodifikationen sehr einfach nachgewiesen werden.

Zahnräder werden häufig im Umform- oder Einspritzverfahren hergestellt (Sintern, Spritzguss, Umformen). Bei solchen Herstellverfahren ist die Fussmodifikation ohne zusätzliche Verfahrenskosten realisierbar, bei Herstellung im Abwälzverfahren kann eine Modifikation nur durch den Einsatz eines Spezialwerkzeugs ausgeführt werden. In Anwendungen, bei denen die Fussfestigkeit das ursächliche Kriterium für den Ausfall von Zahnrädern ist, kann eine sinnvolle Modifikation des Fussbereichs die Gesamtlebensdauer wesentlich verbessern.

Solche Fussmodifikationen können in KISSsoft auf zwei Arten ausgeführt werden:

- Berechnung der Zahnform in KISSsoft und Übergabe an ein CAD. Modifikation im CAD, dann Rückgabe (als DXF-Datei) an KISSsoft zur Berechnung der Zahnfuss-Sicherheit.
- Verwendung eines Algorithmus zur Zahnform-Modifikation, der in KISSsoft eingebaut ist. Dazu stehen zwei Methoden zur Verfügung, die noch besprochen werden.
- Die Zahnform kann natürlich auch an ein Finite-Elemente-Programm übergeben werden (mit DXF-Schnittstelle) und damit optimiert werden. Dieser Weg ist jedoch bekanntermassen viel zeitaufwendiger, ohne dass ein wesentlich besseres Resultat erzielt wird.

4.2.1 Algorithmen zur Zahnfuss-Optimierung

Die Korrektur der Fussrundung zur Erreichung von niedrigen Spannungen im Fussbereich darf nur unterhalb des Fussnutzkreises ausgeführt werden. Falls das Gegenrad am Kopf eine Profilkorrektur aufweist, kann der Beginn der Korrektur etwas nach aussen verschoben werden. In jedem Fall ist es wichtig, das Abwälzen der modifizierten Zahnräder auf dem Bildschirm zu kontrollieren (Abb. 3). Das Ende der Korrektur liegt auf dem Fusskreis in der Mitte der Zahnücke. Häufig ist es notwendig, in der Lückenmitte einen kurzen Bogenteil auf dem Fusskreis zu belassen, damit beispielsweise eine Messrolle angelegt werden kann. Im Bereich zwischen dem

so definierten Beginn und dem Ende der Fusskontur kann die Zahnform mit zwei verschiedenen Algorithmen modifiziert werden.

Der eine, einfachere Algorithmus besteht darin, eine Ellipsen-ähnliche Form der Fussrundung auszuführen (Abb. 7). Der zweite, etwas komplexere Algorithmus wird ähnlich wie von Hirn [7] vorgeschlagen mit zwei tangential ineinander übergehenden Kreisbögen ausgeführt.

Mit dem eingangs gewählten Beispiel ergeben sich durch die Zahnfussoptimierung die in Abbildung 7 gezeigten Veränderungen der Fusskontur. Die Berechnung der Zahnfussicherheit mit dem Verfahren nach Obsieger ergibt die in Tabelle 3 dargestellten Resultate. Verglichen wird mit einem mit konventionellem Werkzeug hergestellten Zahnrad. Eine Erhöhung der Fuss-Sicherheit um 20 Prozent ist problemlos zu realisieren. Auch bei einem Zahnrad, welches mit einem im Kopfbereich optimal gerundeten Werkzeug hergestellt wird, lässt sich die Fuss-Sicherheit immerhin noch um circa 10% erhöhen. Bei Zahnradern, die für eine beschränkte Lebensdauer (im Zeitfestigkeitsbereich) ausgelegt sind, kann diese Massnahme die Lebensdauer beinahe verdoppeln!

Zahnfusssmodifikation	Vorgegebene Länge auf dem Fusskreis	Faktor $Y_S * Y_F$	Erhöhung der Zahnfuss-Sicherheit
Keine		3.735	0 %
Ellipsenförmiger Übergang	0.0	2.897	22.4 %
Zwei Kreisbogen	0.0	4.657	-9.0 %
Ellipsenförmiger Übergang	0.15*mn	3.019	19.2 %
Zwei Kreisbogen	0.15*mn	2.990	19.9 %

Tabelle 3: Einfluss der Zahnfusssmodifikation

Da die Optimierung der Fusskorrektur in KISSsoft selbständig durchgeführt wird, ist das Verfahren sehr effizient. Ohne Aufwand und ohne Mehrkosten kann die Zahnfussfestigkeit beträchtlich gesteigert werden.

5. Maschinenbau-Berechnungssoftware KISSsoft

Die hier bereits mehrfach erwähnte Software KISSsoft [4,5] ist ein umfangreiches Berechnungspaket für den Maschinenbau. Neben Wellen, Achsen, Trägern, Wälz- und Gleitlagern, Schrauben, Wellen-Naben-Verbindungen usw. können insbesondere auch Zahnräder berechnet werden. Ausführliche Informationen sind im Internet über <http://www.KISSsoft.ch/> erhältlich.

Die Zahnradberechnungen beinhalten neben Stirnrädern auch Kegel-, Schnecken- und Schraubräder. Als Konfigurationen lassen sich Zahnradpaare, Planetenstufen, Verlagerungsgetriebe (mit drei oder vier Rädern) und Zahnstangentriebe berechnen.

Die Stirnradberechnung (Abb.2) ist sehr umfangreich und differenziert, damit dem ausgewiesenen Spezialisten alle Möglichkeiten zur detaillierten Auslegung eines Zahnrades gegeben sind. Durch das geschickte Verteilen der Eingaben in Fenster mit notwendigen und solche mit optionalen Angaben ist das Programm aber auch sehr bedienungsfreundlich bei nur gelegentlichem Gebrauch.

Die Berechnungen der Zahn-Geometrie mit allen Kontrollmassen und Toleranzen sowie die Festigkeitsberechnung sind im gleichem Programm integriert, eine wichtige Voraussetzung um schnell und sicher Varianten untersuchen zu können. Wird keine Festigkeitsberechnung gewünscht, kann diese einfach ausgeschaltet werden. In diesem Fall entfallen auch die hierfür zusätzlich notwendigen Eingaben. Als sehr angenehm erweist sich auch die direkte Visualisierung des Zahnradpaares. Durch Anklicken in der Hauptmaske wird sofort der Zahneingriff dargestellt. Die Zahnform wird auf 1/10000 mm genau über die korrekte Simulation des Herstellprozesses bestimmt (Abb.3).

Neben allen Eingabe-Optionen sind Auslegungshilfen für viele der kritischen Parameter, wie z.B. die Profilverschiebung vorhanden. Für die Profilverschiebung (Abb.4) werden hier Vorgaben für ausgeglichenes spezifisches Gleiten, für ausgeglichene Gleitgeschwindigkeit bei Turbogetrieben oder auch nach DIN 3992 und anderen Verfahren angegeben. Bei der Eingabe des Bezugsprofils kann über die Auslegungsfunktion die Angabe erhalten werden, mit welcher Profilhöhe eine gewünschte Profilüberdeckung erreicht wird (für Hochverzahnungen).

5.1. Optimierung von Zahnrädern

Ein ganz wesentlicher Schwerpunkt der Berechnungssoftware sind die Auslegungs- und Optimierungsfunktionen. Mit der Grobauslegung kann bei Vorgabe der Leistung und der Sollsicherheiten von KISSsoft die komplette Auslegung (Modul, Zähnezahl, Zahnbreite, Achsabstand usw.) einer Zahnradstufe ausgeführt werden. Für wesentliche Parameter werden dabei Intervalle vorgegeben, wodurch eine technisch optimal passende Lösung gefunden werden kann.

Die Feinauslegung erlaubt es, eine Zahnradstufe mit genau festgelegten Randbedingungen gezielt zu optimieren. Zum Beispiel ist einer der häufigsten Anwendungsfälle in der Praxis die Problemstellung, bei vorgegebenem Achsabstand und Zahnbreiten ein Zahnradpaar bezüglich Festigkeit oder Lärmentwicklung wesentlich zu verbessern. Gerade für solche Probleme ist die Feinauslegung entwickelt worden. Sie gibt eine Liste mit sämtlichen möglichen Zahngeometrie-Varianten für das gestellte Problem aus. Alle Varianten sind vollständig mit Geometrie und Festigkeit nachgerechnet und kontrolliert; sie werden nummeriert und nach verschiedensten Kriterien wie Tragfähigkeit, Abweichung von der gewünschten Sollübersetzung, Geräuschentwicklung, Wirkungsgrad, spezifischem Gleiten, Gewicht und Trägheitsmoment qualifiziert. Damit kann nun der Ingenieur die bestgeeignete Lösung auswählen und per Knopfdruck in das Hauptprogramm übernehmen.

Diese Feinauslegung hat sich in den letzten Jahren als das optimale Werkzeug erwiesen, mit dem in der Praxis die meisten Problemstellungen sehr schnell und effizient gelöst werden.

5.2. Berechnungsoptionen für Sonderprobleme

Neben der klassischen Nachrechnung und den zuvor beschriebenen Optimierungsfunktionen stehen zahlreiche zusätzliche Berechnungen zur Verfügung, die die Arbeit bei der Auslegung von Zahnrädern unterstützen. Beispielsweise kann über die Berechnung des Schubspannungsverlaufs (senkrecht zur Zahnoberfläche) ein Vorschlag für die Einhärtetiefe für Einsatz- oder Nitrier-Stähle ausgegeben werden (Abb.5). Je nach Krümmung der Flanken kann so die Verweilzeit im Ofen beim Härteprozess wesentlich verkürzt und dadurch Kosten gespart werden.

Für Zahnräder aus Kunststoff (oder auch für gesinterte Zahnräder) kann die Zahnform für die Herstellung einer optimalen Gußform modifiziert werden. Damit wird das Schwinden des Kunststoffs beim Erstarren kompensiert. Der relativ grosse Teilungsfehler bei solchen Rädern kann durch eine softwaremässig optimal ausgelegte Einlaufkurve am Zahnkopf kompensiert werden.

Für den Automobil- oder Kranbau können die Berechnungen mit vorgegebenen oder frei definierbaren Lastkollektiven durchgeführt werden.

Durch die Integration von Berechnungen nach Anwender-Wünschen ist ein sehr umfangreiches Berechnungsprogramm entstanden, das alle Bereiche von der Feinwerktechnik bis zum Entwurf von Schwerlast- und Schiffsgetrieben optimal unterstützt.

Zusammenfassung

Die ISO 6336 als Grundlage für die Festigkeitsberechnung von Zahnrädern ist seit drei Jahren gültig. Diese Norm entspricht weitestgehend der bekannten DIN 3990. Die Anwendung ist sehr zu empfehlen, damit die Probleme mit ganz anders konzipierten Rechenvorschriften, wie insbesondere den US-Normen, ausgeräumt sind. Die Berechnungssoftware KISSsoft erlaubt die Berechnung nach ISO 6336, DIN 3990 und AGMA 2001. Damit wird ein Umstieg von DIN 3990 auf ISO 6336 sehr vereinfacht.

Die Berechnung der Zahnfuß-Sicherheit kann durch einen Zusatz, der die effektive Zahnform berücksichtigt, wesentlich verfeinert werden. Dieses Verfahren ist insbesondere bei Innenverzahnungen oder Hochverzahnungen äusserst nützlich. Eine wesentliche Verbesserung der Zahnfußstragfähigkeit wird durch eine Optimierung der Zahnfußrundung erreicht. Die entsprechenden Algorithmen werden beschrieben. Die Optimierung ist in KISSsoft integriert, wodurch die Steigerung der Fuss-Sicherheit mit dem Festigkeitsberechnungsverfahren direkt nachgewiesen werden kann.

[1] ISO 6336, Calculation of load capacity of spur and helical gears, part 1 –5, 1996

[2] DIN 3990, Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Teil 1 - 5

[3] AGMA 2001-C95, Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth

[4] Kissling, U; Berechnungsprogramm für den Maschinenbau mit neuem Design, Antriebstechnik; 35 (1996); Nr.3; S. 59 –61.

[5] Kissling, U; Auslegung von Maschinenelementen, CIM Management, 11 (1995),4.

[6] Obsieger, Zahnformfaktoren von Aussen- und Innenverzahnungen, Konstruktion 32 (1980) S. 443-447

[7] Hirn, H.; Hybridverzahnung im Vergleich mit dem DIN-Evolventenprofil, Antriebs-technik, 34 (1995); Nr.8, S.40-42.

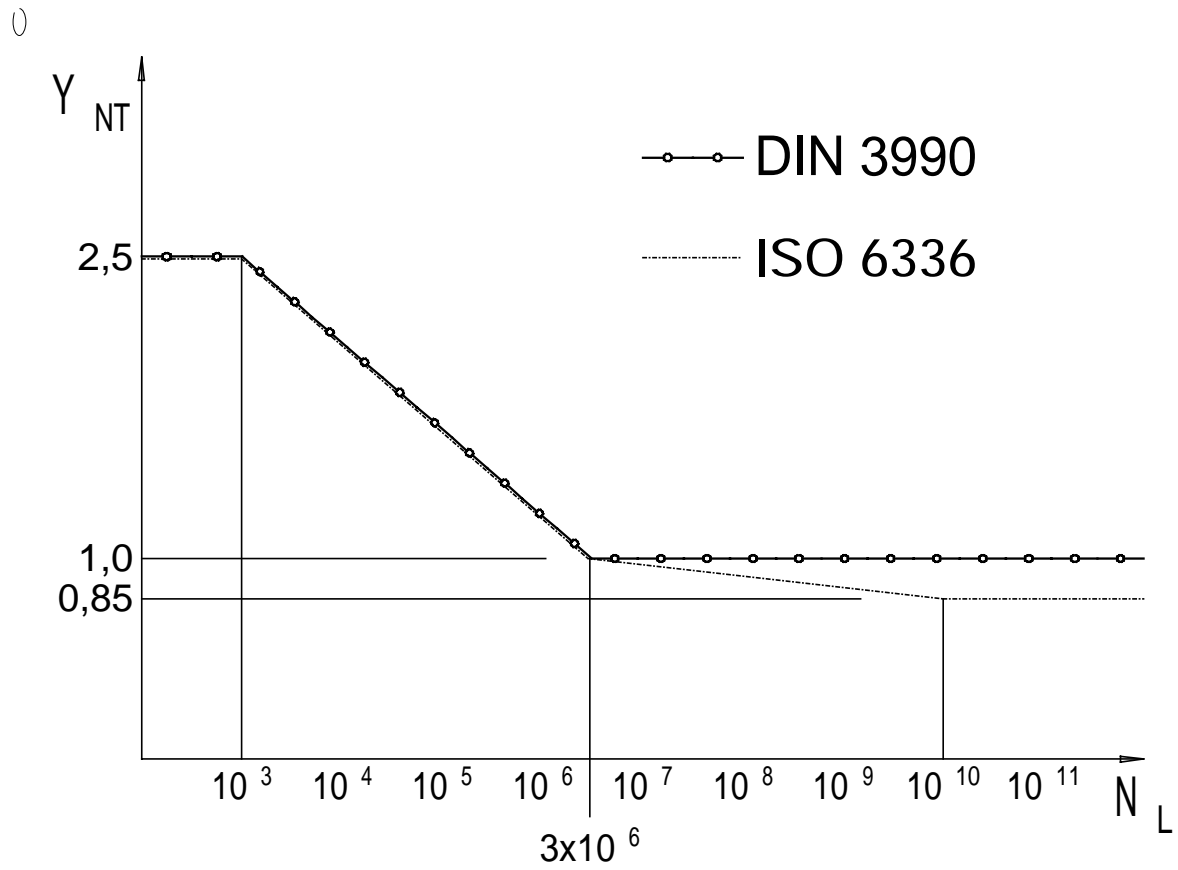


Abb.1 Wöhlerlinie für die Zahnfuß-Schwellfestigkeit nach DIN und ISO
(Y_{NT}: Lebensdauerfaktor, N_L: Lastwechselzahl)

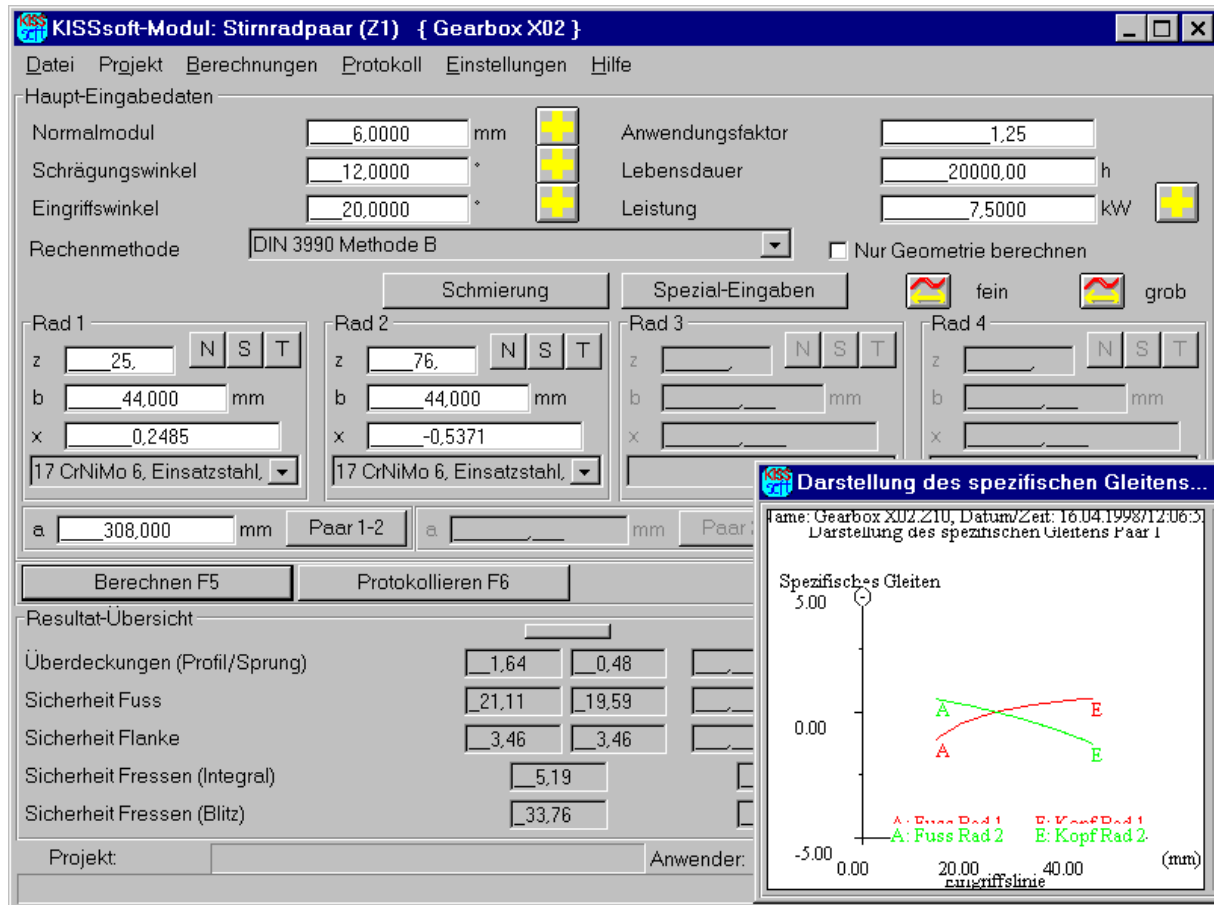


Abb.2 Eingabeoberfläche der KISSsoft-Stirradberechnung (Hauptmaske, mit Darstellung des spezifischen Gleitens)

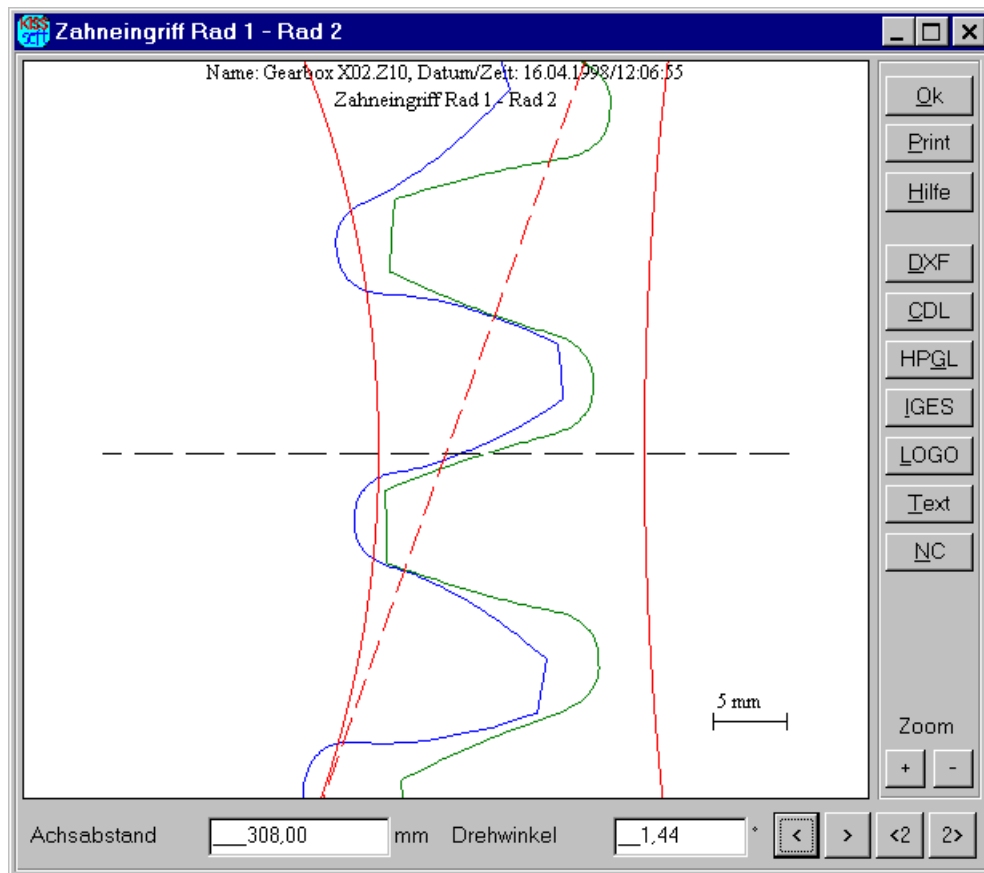


Abb.3 Darstellung des Zahneingriffs der spielbehafteten Verzahnung

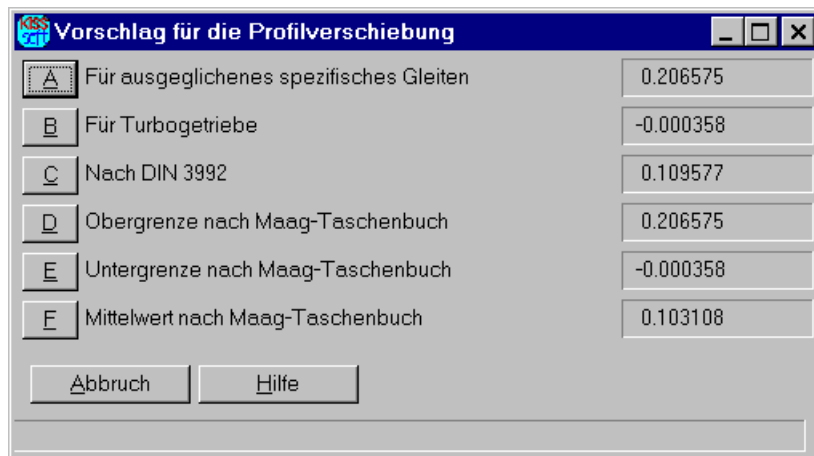


Abb.4 Auslegungsvorschläge zur Profilverschiebung

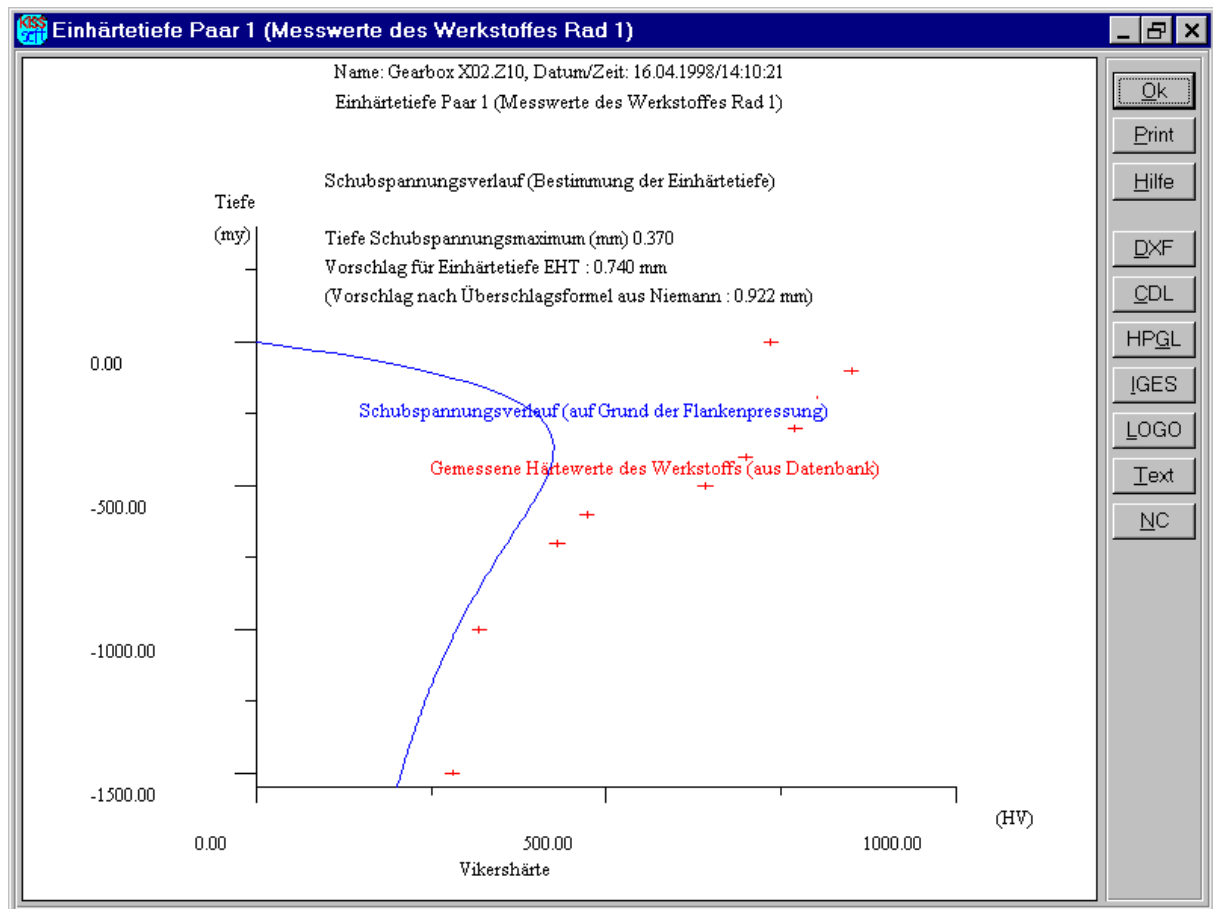


Abb.5 Bestimmung der Eindhärtetiefe (Schubspannungsverlauf senkrecht zur Flankenoberfläche, Messpunkte von Härtewerten der Probe)

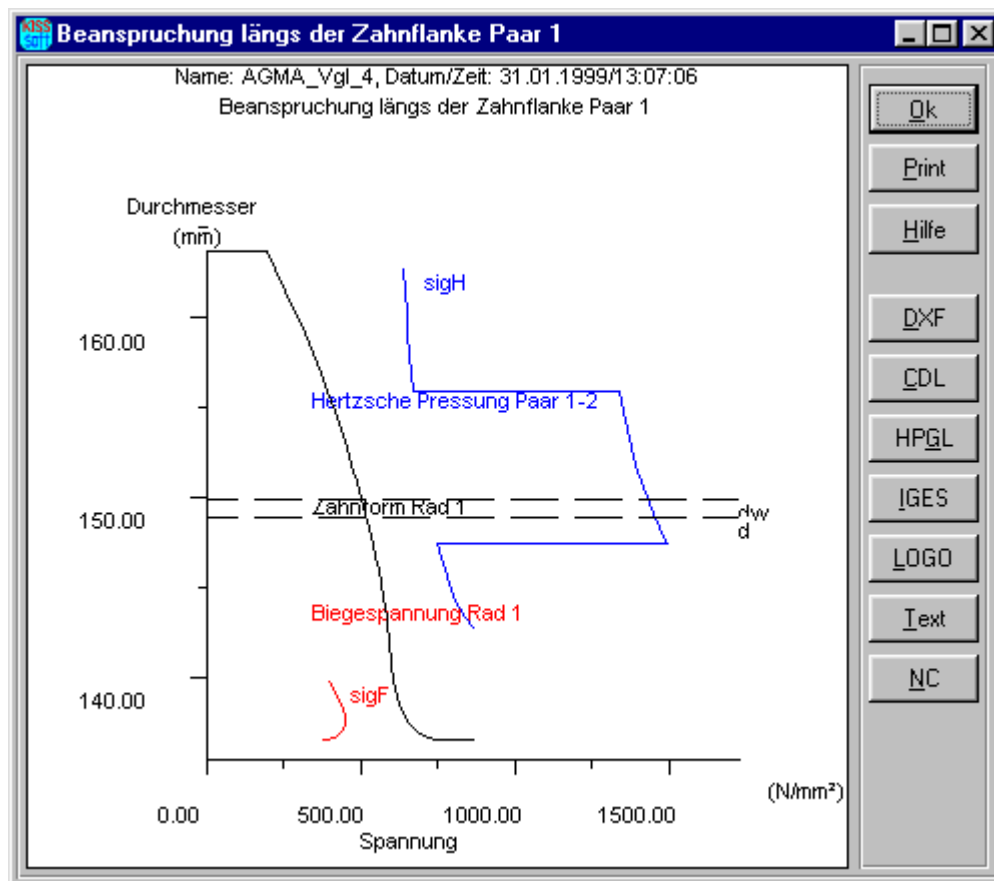


Abb.6 Produkt $y_F \cdot y_S$ am Zahn (sowie Hertzische Pressung längs der Flanke) in graphischer Darstellung

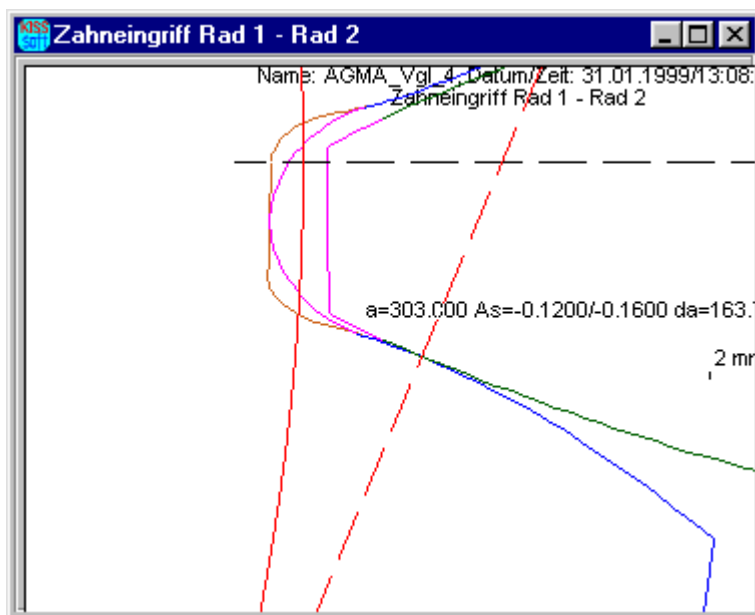
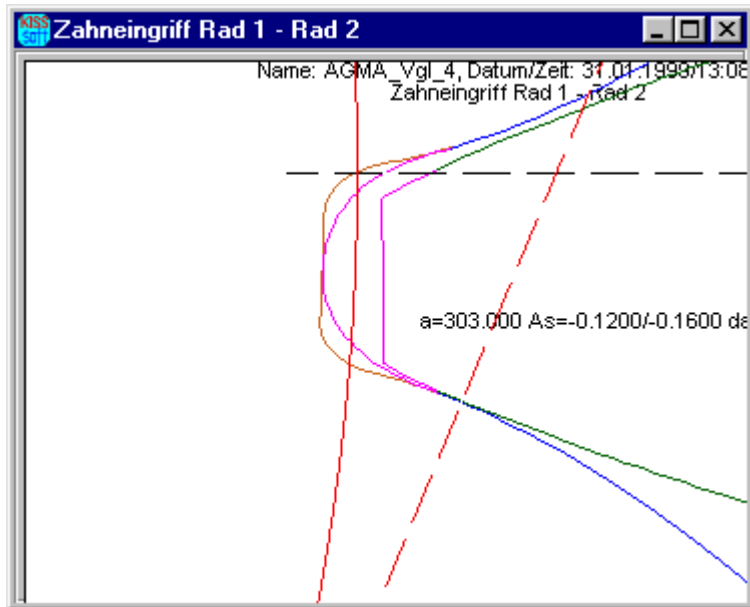


Abb.7 Zahnfussoptimierung durch ellipsenähnliche Form (2) und mit zwei tangentialen Kreisbögen (3), jeweils im Vergleich mit der nicht modifizierten Form (1)

```

----- KISSsoft++ KPV Rel. 01/97 -----
KISSsoft-Evaluations-Version      KISSsoft AG      CH-8052 ZUERICH
KISSsoft++ Professional Version
Berechnung :                      AGMA_Vgl_4.Z10
Projekt :
Datum: 02.12.1998/18:04:56      Anwender: hm
Anwendung: Schrägverzahnung mit KHb KHa-Faktoren Komm.Nr:
-----

```

STIRNRAD-BERECHNUNG (STIRNRAD-PAAR)

Fusshöhe Bezugsprofil (in Modul)	[hfP]	1.25	1.25
Fussradius Bezugsprofil (in Modul)	[rofP]	0.20	0.20
Kopfhöhe Bezugsprofil (in Modul)	[haP]	1.00	1.00

3. ZAHNFUSS-TRAGFÄHIGKEIT

```

----- RAD 1 ----- RAD 2 -----
Rechnung der Zahnformfaktoren nach Methode: C
(Zahnformfaktoren mit Profilverschiebung x berechnet)
Zahnformfaktor           [YF]           2.38           2.20
Spannungskorrekturfaktor [YS]           1.87           2.03
Biegehebelarm (mm)       [hF]           11.86          11.81
Kraftangriffswinkel (°) [alfen]        28.99          23.09
Zahnfussdicke (mm)       [sFn]          12.93          13.77
Zahnfussradius (mm)      [roF]          2.13           1.88

Überdeckungsfaktor       [Yeps]                   0.70
Schrägungsfaktor        [Ybet]                   0.84
Massgebende Zahnbreite (mm) [b]           44.00          44.00
Örtliche Zahnfuss-Spannung (N/mm²) [sigF0]       507.71          508.19
(Effektive) Zahnfuss-Spannung (N/mm²) [sigF]       532.37          532.87

Zulässige Zahnfussspannung von Prüf-Zahnrad
Stützziffer             [Ydrel]           1.005          1.010
Oberflächenfaktor       [YR]              0.957          0.957
Grössenfaktor (Zahnfuss) [YX]              0.990          0.990
Zeitfestigkeits-Faktor  [YNT]             1.000          1.000
Wechselbiegungs-Faktor  [Kwb]             1.000          1.000
Sp.-Korrekturfaktor Y-st [Yst]                   2.00
Zulässige Zahnfuss-Spannung (N/mm²) [sigFP]       999.38          1004.60
Soll-Sicherheit         [SSi.Fuss]        1.40           1.40
Übertragbare Leistung (kW) [kWRating]      234.65          235.66
Sicherheitsfaktor für Zahnfussspannung [SF]           1.88           1.89

```

Mit Fräser r=0.2

3. ZAHNFUSS-TRAGFÄHIGKEIT

```

----- RAD 1 ----- RAD 2 -----
Rechnung der Zahnformfaktoren nach Methode: C
Zahnformfaktoren nach der Methode von B.Obsieger berechnet
(Bestimmung des grössten Wertes YF * YS an der effektiven Zahnform)
Zahnformfaktor           [YF]           2.32           2.12
Spannungskorrekturfaktor [YS]           1.61           1.68
Biegehebelarm (mm)       [hF]           11.88          11.82
Kraftangriffswinkel (°) [alfen]        30.86          24.81
Zahnfussdicke (mm)       [sFn]          12.99          13.93
Zahnfussradius (mm)      [roF]          1.96           1.67

Überdeckungsfaktor       [Yeps]                   0.70
Schrägungsfaktor        [Ybet]                   0.84
Massgebende Zahnbreite (mm) [b]           44.00          44.00
Örtliche Zahnfuss-Spannung (N/mm²) [sigF0]       423.07          404.80
(Effektive) Zahnfuss-Spannung (N/mm²) [sigF]       443.62          424.46

Zulässige Zahnfussspannung von Prüf-Zahnrad
Stützziffer             [Ydrel]           1.007          1.014
Oberflächenfaktor       [YR]              0.957          0.957
Grössenfaktor (Zahnfuss) [YX]              0.990          0.990
Zeitfestigkeits-Faktor  [YNT]             1.000          1.000
Wechselbiegungs-Faktor  [Kwb]             1.000          1.000
Sp.-Korrekturfaktor Y-st [Yst]                   2.00
Zulässige Zahnfuss-Spannung (N/mm²) [sigFP]       1001.64          1008.47
Soll-Sicherheit         [SSi.Fuss]        1.40           1.40
Übertragbare Leistung (kW) [kWRating]      282.24          296.99
Sicherheitsfaktor für Zahnfussspannung [SF]           2.26           2.38

```

Mit Ellipse (Länge auf Fusskreis =0)

Rad1 : Fusskorrektur ab d=147, 0 mm Länge

Rad2 : Fusskorrektur ab d=444, Kopfeinlaufkurve ab d=461, 1.2mm Rücknahme

3. ZAHNFUSS-TRAGFÄHIGKEIT

	----- RAD 1 -----	RAD 2 -----	
Rechnung der Zahnformfaktoren nach Methode: C			
Zahnformfaktoren nach der Methode von B.Obsieger berechnet			
(Bestimmung des grössten Wertes YF * YS an der effektiven Zahnform)			
Zahnformfaktor	[YF]	2.13	2.22
Spannungskorrekturfaktor	[YS]	1.36	1.46
Biegehebelarm (mm)	[hF]	9.20	10.35
Kraftangriffswinkel (°)	[alfen]	30.86	24.81
Zahnfussdicke (mm)	[sFn]	11.91	12.74
Zahnfussradius (mm)	[roF]	5.04	3.34
Überdeckungsfaktor	[Yeps]		0.70
Schrägungsfaktor	[Ybet]		0.84
Massgebende Zahnbreite (mm)	[b]	44.00	44.00
Örtliche Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF0]	330.66	368.41
(Effektive) Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF]	346.72	386.30
Zulässige Zahnfussspannung von Prüf-Zahnrad			
Stützziffer	[Ydrel]	0.986	0.994
Oberflächenfaktor	[YR]	0.957	0.957
Grössenfaktor (Zahnfuss)	[YX]	0.990	0.990
Zeitfestigkeits-Faktor	[YNT]	1.000	1.000
Wechselbiegungs-Faktor	[Kwb]	1.000	1.000
Sp.-Korrekturfaktor Y-st	[Yst]		2.00
Zulässige Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigFP]	980.36	988.68
Soll-Sicherheit	[SSi.Fuss]	1.40	1.40
Übertragbare Leistung (kW)	[kWRating]	353.44	319.92
Sicherheitsfaktor für Zahnfussspannung	[SF]	2.83	2.56

Mit Hirn (Länge auf Fusskreis =0.1):

(Länge 0.0 gab unsinnig tiefen Wert)

3. ZAHNFUSS-TRAGFÄHIGKEIT

	----- RAD 1 -----	RAD 2 -----	
Rechnung der Zahnformfaktoren nach Methode: C			
Zahnformfaktoren nach der Methode von B.Obsieger berechnet			
(Bestimmung des grössten Wertes YF * YS an der effektiven Zahnform)			
Zahnformfaktor	[YF]	1.46	1.35
Spannungskorrekturfaktor	[YS]	3.19	2.53
Biegehebelarm (mm)	[hF]	12.86	12.66
Kraftangriffswinkel (°)	[alfen]	30.86	24.81
Zahnfussdicke (mm)	[sFn]	17.04	18.04
Zahnfussradius (mm)	[roF]	0.20	0.43
Überdeckungsfaktor	[Yeps]		0.70
Schrägungsfaktor	[Ybet]		0.84
Massgebende Zahnbreite (mm)	[b]	44.00	44.00
Örtliche Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF0]	529.42	389.36
(Effektive) Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF]	555.13	408.27
Zulässige Zahnfussspannung von Prüf-Zahnrad			
Stützziffer	[Ydrel]	1.159	1.095
Oberflächenfaktor	[YR]	0.957	0.957
Grössenfaktor (Zahnfuss)	[YX]	0.990	0.990
Zeitfestigkeits-Faktor	[YNT]	1.000	1.000
Wechselbiegungs-Faktor	[Kwb]	1.000	1.000
Sp.-Korrekturfaktor Y-st	[Yst]		2.00
Zulässige Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigFP]	1153.01	1088.94
Soll-Sicherheit	[SSi.Fuss]	1.40	1.40
Übertragbare Leistung (kW)	[kWRating]	259.62	333.40
Sicherheitsfaktor für Zahnfussspannung	[SF]	2.08	2.67

Mit Ellipse (Länge auf Fusskreis =0.96):

3. ZAHNFUSS-TRAGFÄHIGKEIT

----- RAD 1 ----- RAD 2 -----

Rechnung der Zahnformfaktoren nach Methode: C
Zahnformfaktoren nach der Methode von B.Obsieger berechnet
(Bestimmung des grössten Wertes YF * YS an der effektiven Zahnform)

Zahnformfaktor	[YF]	2.22	2.22
Spannungskorrekturfaktor	[YS]	1.36	1.50
Biegehebelarm (mm)	[hF]	9.69	10.33
Kraftangriffswinkel (°)	[alfen]	30.86	24.81
Zahnfussdicke (mm)	[sFn]	11.97	12.73
Zahnfussradius (mm)	[roF]	5.21	2.83
Überdeckungsfaktor	[Yeps]		0.70
Schrägungsfaktor	[Ybet]		0.84
Massgebende Zahnbreite (mm)	[b]	44.00	44.00
Örtliche Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF0]	343.25	378.60
(Effektive) Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF]	359.92	396.99
Zulässige Zahnfussspannung von Prüf-Zahnrad			
Stützziffer	[Ydrel]	0.985	0.998
Oberflächenfaktor	[YR]	0.957	0.957
Grössenfaktor (Zahnfuss)	[YX]	0.990	0.990
Zeitfestigkeits-Faktor	[YNT]	1.000	1.000
Wechselbiegungs-Faktor	[Kwb]	1.000	1.000
Sp.-Korrekturfaktor Y-st	[Yst]		2.00
Zulässige Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigFP]	979.97	992.16
Soll-Sicherheit	[SSi.Fuss]	1.40	1.40
Übertragbare Leistung (kW)	[kWRating]	340.34	312.40
Sicherheitsfaktor für Zahnfussspannung	[SF]	2.72	2.50

Mit Hirn (Länge auf Fusskreis =0.96):

3. ZAHNFUSS-TRAGFÄHIGKEIT

----- RAD 1 ----- RAD 2 -----

Rechnung der Zahnformfaktoren nach Methode: C
Zahnformfaktoren nach der Methode von B.Obsieger berechnet
(Bestimmung des grössten Wertes YF * YS an der effektiven Zahnform)

Zahnformfaktor	[YF]	1.68	2.22
Spannungskorrekturfaktor	[YS]	1.78	1.43
Biegehebelarm (mm)	[hF]	12.42	10.32
Kraftangriffswinkel (°)	[alfen]	30.86	24.81
Zahnfussdicke (mm)	[sFn]	15.59	12.72
Zahnfussradius (mm)	[roF]	1.41	3.75
Überdeckungsfaktor	[Yeps]		0.70
Schrägungsfaktor	[Ybet]		0.84
Massgebende Zahnbreite (mm)	[b]	44.00	44.00
Örtliche Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF0]	341.03	361.88
(Effektive) Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigF]	357.59	379.46
Zulässige Zahnfussspannung von Prüf-Zahnrad			
Stützziffer	[Ydrel]	1.024	0.992
Oberflächenfaktor	[YR]	0.957	0.957
Grössenfaktor (Zahnfuss)	[YX]	0.990	0.990
Zeitfestigkeits-Faktor	[YNT]	1.000	1.000
Wechselbiegungs-Faktor	[Kwb]	1.000	1.000
Sp.-Korrekturfaktor Y-st	[Yst]		2.00
Zulässige Zahnfuss-Spannung (N/mm ²)	[sigFP]	1017.99	986.40
Soll-Sicherheit	[SSi.Fuss]	1.40	1.40
Übertragbare Leistung (kW)	[kWRating]	355.85	324.94
Sicherheitsfaktor für Zahnfussspannung	[SF]	2.85	2.60