

## **Berechnung und Optimierung von Zahnrädern mit moderner Software**

### **1. ENTWICKLUNG DER ZAHNRAD-TECHNOLOGIE**

Weltweit werden immer mehr Zahnräder aus Kunststoff gespritzt, aus Metallpulver gesintert oder durch Formschleifen aus Stahlkörpern im Einstechverfahren erzeugt. Damit entfallen gewisse Einschränkungen, welche für Zahnräder gelten, die im Abwälzverfahren oder auf konventionellen Zahnradschleifmaschinen hergestellt werden. Für die Optimierung von Zahnrädern auf Lauf-, Lärm- und Festigkeits-Eigenschaften eröffnen sich damit neue Möglichkeiten. Mit Hilfe von geeigneter Software ist die Berechnung und Optimierung von solchen Zahnrädern ohne Probleme möglich. Damit ergeben sich beste Perspektiven um Zahnradgetriebe wesentlich zu verbessern.

In Zukunft werden sich vor allem die folgenden Tendenzen verstärken:

- Zunehmender Ersatz von Metall durch Kunststoff
- Bedeutend lärm- und vibrationsärmere Getriebe
- Erhöhung der Leistungsdichte (kleinere Baugrößen bei gleicher Leistung)
- Einsatz von Sonderzahnformen (nicht-evolventische Verzahnungen)

Auf Prozeduren und Berechnungsprogramme zur Optimierung von Zahnrädern wird in diesem Artikel eingegangen [3].

### **2. Gezielte Optimierung der Zahnform für optimale Betriebseigenschaften**

Je nach dem geplanten Einsatz sind die Anforderungen an die Zahnrad-Auslegung sehr unterschiedlich: Geringe Geräuscherzeugung oder Vibrationsanregung, tiefe Herstellkosten, höchste Festigkeit, optimale Lebensdauer sind einige der wesentlichen Kriterien. Um diese Eigenschaften zu erreichen gibt es verschiedene Methoden zur Optimierung von Zahnrädern, die hier beschrieben werden. Diese Methoden sind nicht neu, auf Grund der heute geänderten Möglichkeiten bei der Fertigung können jedoch einzelne dieser Methoden vermehrt eingesetzt werden, ohne (oder mit sehr geringer) Erhöhung der Herstell-Kosten.

#### **2.1. Verschiedene Optimierungsmethoden für die Zahnform**

Zur Optimierung der Geometrie von Zahnrädern stehen verschiedene Methoden zur Verfügung. Je nach dem Herstellverfahren können alle oder nur einzelne dieser Methoden gleichzeitig eingesetzt werden. Wirkungsvolle Massnahmen für die Geometrie-Optimierung sind:

##### **Stufe 1: Geometrie-Veränderung bei vorgegebenem Bezugsprofil:**

Die Geometrieveränderung durch Variation von Modul, Eingriffswinkel, Schrägungswinkel und Profilverschiebung bei gegebenem Bezugsprofil hat einen starken Einfluss auf die Eigenschaften der Verzahnung. Insbesondere bei schrägverzahnten Stirnrädern kann damit in den meisten Fällen bereits eine optimale Lösung gefunden werden. Als leistungsfähiges Software-Werkzeug dient hierzu die Feinauslegung der KISSsoft-Programme (siehe Abschnitt 3.4) [1], die für diese Problemstellung eine Zusammenstellung aller möglichen Lösungen erzeugt und nach den zu erreichenden Zielen (Geräuscherzeugung, Festigkeit, Lebensdauer, ...) klassifiziert. On this basis the engineer can choose the solution best suited for the specific problem. Beispielsweise kann mit

dieser Methode in konkreten Anwendungen, bei gleichem Achsabstand und Zahnbreite, die Festigkeit um 20-25% gesteigert werden.

### **Stufe 2: Geometrie-Veränderung durch Variation des Bezugsprofils:**

Eine Bezugsprofilveränderung (normalerweise eine Vergrößerung der Zahnhöhe) ergibt eine Veränderung der Profilüberdeckung. Für lärmarme und gleichmässig laufende Verzahnungen ist eine Profilüberdeckung von 2,0 (oder etwas höher) anzustreben. Damit kann der Steifigkeitssprung beim Wechsel von Einzel- auf Doppeleingriff minimiert werden. Durch ein entsprechendes Bezugsprofil kann die gewünschte Überdeckung erreicht werden, allerdings treten dann meistens Eingriffsstörungen beim Abwälzen der Zahnräder auf. Die möglichen Lösungen sind deshalb begrenzt. Um dieses Problem effizient bearbeiten zu können, bietet die zuvor erwähnte KISSsoft-Feinauslegung [1] als Zusatzoption die Möglichkeit, selbständig alle möglichen Lösungen mit einer vorgeschriebenen Soll-Profilüberdeckung auszuwählen und anzuzeigen.

### **Stufe 3: Eliminieren des Eintrittstosses durch Profil-Korrektur:**

Beim Abwälzen eines Zahnradpaares tritt beim Kontakt von zwei neu in den Eingriff kommenden Zähnen der sogenannte Eintrittstoss auf. Dieser Stoss erzeugt Lärm und ist umso grösser, je ungenauer die Eingriffsteilung und je grösser die Deformation der Zähne unter Last ist. Bei Kunststoff-Zahnradern wird deshalb die Evolvente im Kopfbereich durch eine Eingleitkurve modifiziert. Bei Rädern aus metallischen Werkstoffen wird diese Massnahme Profilkorrektur am Kopf genannt, da sie dort wegen der viel höheren Steifigkeit im Betrag wesentlich kleiner ist. Normalerweise wird die Eingleitkurve bei beiden Rädern am Kopf ausgeführt; als Variante (z.B. bei Zahnstangen-Trieben) kann die Korrektur nur an einem Rad, dann aber im Kopf- und im Fussbereich, ausgeführt werden. Die Eingleitkurve besteht vorteilhaft aus drei enger werdenden Kreisbögen, die von KISSsoft [1] auf Anwahl hin selbständig berechnet und in die Zahnform integriert werden (fig. 1).

### **Stufe 4: Optimierung des Zahnfusses:**

Die Dauerbruch-Sicherheit wird durch einen grossen Radius im Übergang von der Evolvente in den Fusskreis wesentlich erhöht. Durch die Zahnradherstellung im Abwälzverfahren entsteht auch bei gut gerundetem Kopf des Werkzeuges nicht immer eine optimale Rundung. Durch eine entsprechende Modifikation, die natürlich nur unterhalb des genutzten Evolventenbereichs ausgeführt werden darf, kann die Sicherheit wesentlich gesteigert werden (fig. 1).

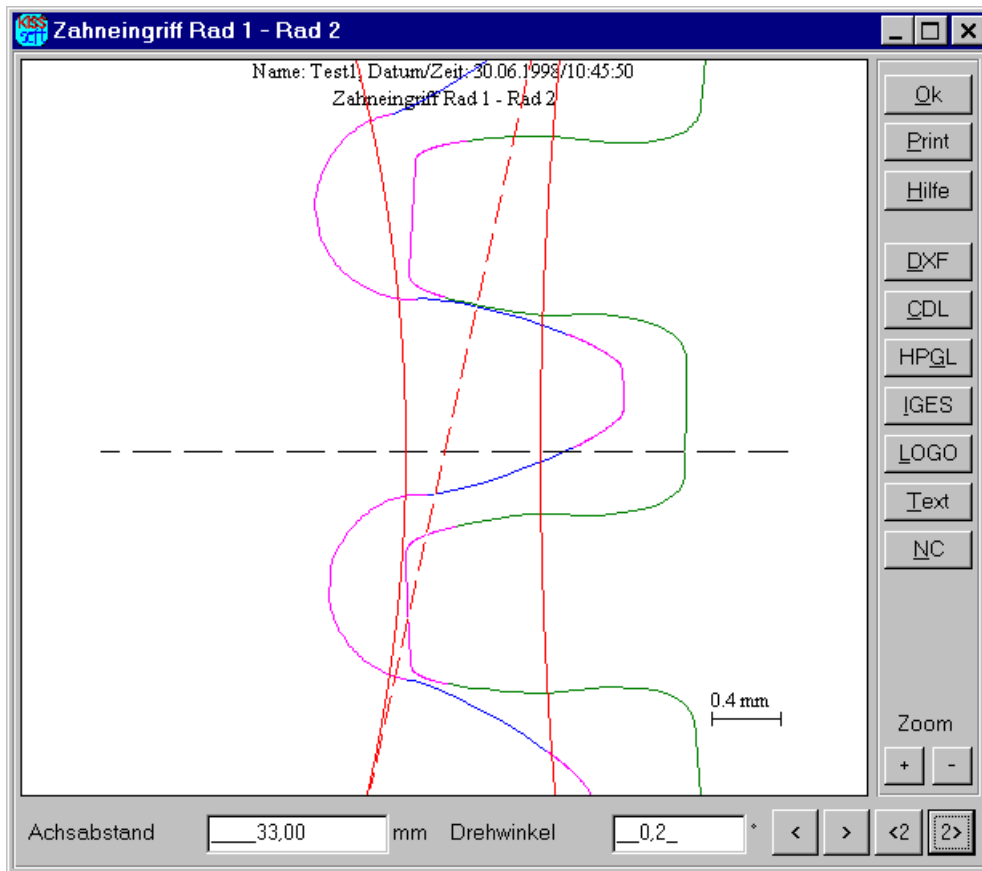


Abbildung 1: Kontrolle des Zahneingriffs eines modifizierten Zahnradpaares (die modifizierten Teile der Kontur sind mit Farbe markiert)

Die zur Optimierung gewählten Massnahmen müssen unter Berücksichtigung der herzustellenden Stückzahl und des Herstellverfahrens ausgesucht werden. Die Tabelle 1 gibt einen Überblick über Herstellverfahren und Zahnrad-Optimierungsmethoden. Die Beachtung dieser Zusammenhänge ist äusserst wichtig, um eine optimale und kostengünstige Auslegung einer Zahnradstufe zu erreichen.

Herstellverfahren	Werkstoff	Stückzahl	Werkzeug	Optimierungsstufe
Wälzfräsen (nur Fräsen)	Metall	klein	A	1
		mittel	B	1, 2
		gross	C	1, 2, 3, 4
	Kunststoff	klein	A	1
mittel		B	1, 2	
Wälzfräsen und Schleifen	Metall	klein	A	1, 3
		mittel	B	1, 2, 3
		gross	C	1, 2, 3, 4
Sintern	Metall	gross	D	1, 2, 3, 4
Spritzguss	Kunststoff	gross	D	1, 2, 3, 4
Formschleifen	Metall	mittel/gross	D	1, 2, 3, 4

Tabelle 1: Zahnrad-Herstellverfahren und dafür geeignete Optimierungsmethoden

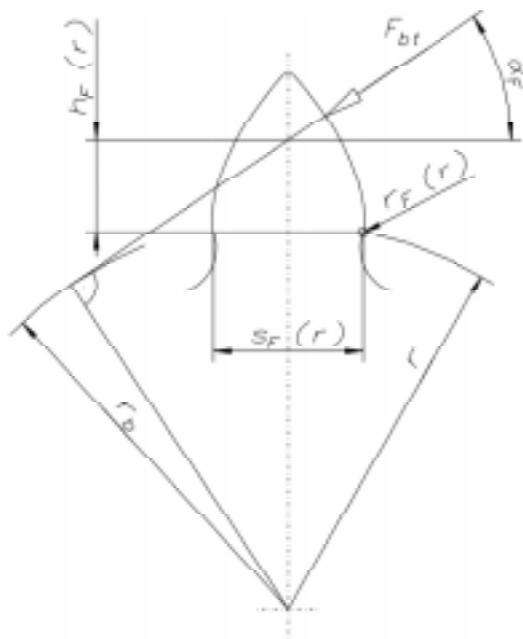
Erläuterungen zu Werkzeug:

A: Ein vorhandenes Werkzeug muss für die Herstellung verwendet werden können. Dies bedeutet, dass das Bezugsprofil vorgegeben ist.

- B: Für mittelgrosse Stückzahlen wird ein auf dem Markt erhältliches Werkzeug gekauft. Das Bezugsprofil kann somit in gewissen Grenzen (Auswahl an Standardwerkzeugen) variiert werden.
- C: Für grosse Serien kann ein teures Sonderwerkzeug gekauft werden, welches speziell für die herzustellende Verzahnung ausgelegt ist.
- D: Bei der Herstellung von Zahnrädern im Sinter- oder Einspritzverfahren muss in jedem Fall ein passendes Werkzeug hergestellt werden. Die Zahnform kann ohne zusätzliche Kosten beliebig modifiziert werden, um optimale Laufeigenschaften zu erreichen.

## **2.2. Festigkeitsanalyse für optimierte, evolventische Zahnräder**

Für die Festigkeitsberechnung von optimierten Zahnrädern wurde ein verlässlicher Algorithmus entwickelt. Alle normierten Rechenmethoden bestimmen die Zahnfuss-Spannung über eine vereinfachte Modellierung der tatsächlichen Verhältnisse. Nach ISO6336 wird der kritische Querschnitt im Zahnfuss durch das Anlegen der 30°-Tangente an die Fusskontur gefunden. Nach AGMA wird die Louis-Parabel in die Zahnform gelegt, wobei der Berührungspunkt der Parabel mit der Fussrundung den kritischen Querschnitt festlegt. Je nach der tatsächlicher Gestalt der Fussrundung wird damit ein kleinerer oder grösserer Fehler impliziert. In einer Veröffentlichung von B. Obsieger [2] ist bereits vor Jahren ein Ansatz für eine wesentliche Verbesserung der Rechenmethode vorgeschlagen worden. Auf Grund der tatsächlichen Zahnform wird für jeden Punkt im Zahnfussbereich der Zahnform-Faktor (ISO:YF, AGMA:Y) und der Spannungskorrekturfaktor (ISO:YS, AGMA:Kf) berechnet und diejenige Stelle bestimmt, an der das Produkt (ISO:YF\*YS, AGMA:Y/Kf) das Maximum erreicht (fig. 2).



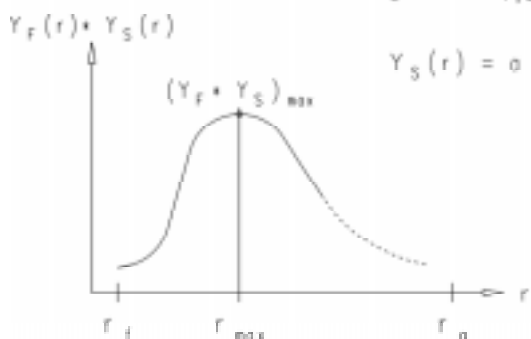
$$Y_F(r) = \frac{6 \cdot h_F(r) \cdot \cos(\alpha_F)}{(s_F(r))^2 \cdot \cos(\alpha_n)}$$

$$q_s = 0,5 \cdot s_F(r) / r_F(r)$$

$$a = 1,2 + 0,13 (s_F(r) / h_F(r))$$

$$b = 1,21 + 2,3 / (s_F(r) / h_F(r))$$

$$Y_S(r) = a \cdot q_s^{(1/b)}$$



(fig. z-026)

Abbildung 2 : Herleitung der Zahnfußspannung in einem beliebigen Punkt des Fußes über  $Y_F(r)$  und  $Y_S(r)$

Dieser Berechnungsablauf ist in der Software integriert. Nach dem Ansatz von Obsieger wird der kritische Zahnfußquerschnitt bestimmt, wobei wahlweise der Kraftangriff am Kopf (AGMA: Loaded at tip) oder der Kraftangriff am Einzeleingriffspunkt (AGMA: Loaded at PSTC) zugrunde gelegt werden kann. Die Festigkeitsberechnung nach DIN, ISO oder AGMA wird anschließend mit diesen spezifischen Daten vollständig durchgeführt. Der Verlauf der Spannungen kann auch grafisch angezeigt werden (fig. 3).

Auch die Berechnung der Hertzischen Pressung längs der Zahnflanke wird auf Grund der effektiven Zahnform berechnet. Dabei werden für jeden Eingriffspunkt die zugehörigen Krümmungsradien der beiden Zahnräder bestimmt und daraus die Pressung berechnet.

Die gleichen Daten erlauben auch die Berechnung der Gleitgeschwindigkeit (fig. 4), der lokalen Erwärmung, des Wirkungsgrades und der Sicherheit gegen Fressen dieser modifizierten Zahnformen.

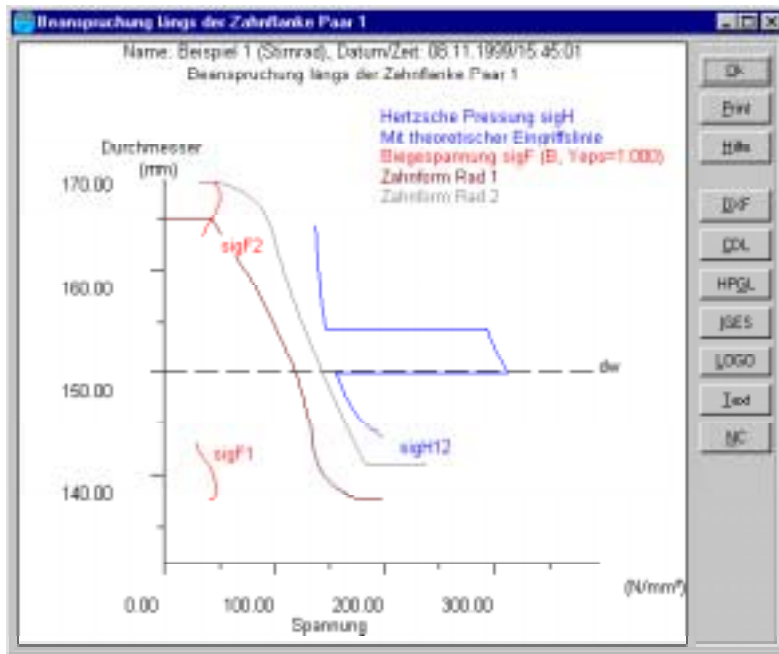
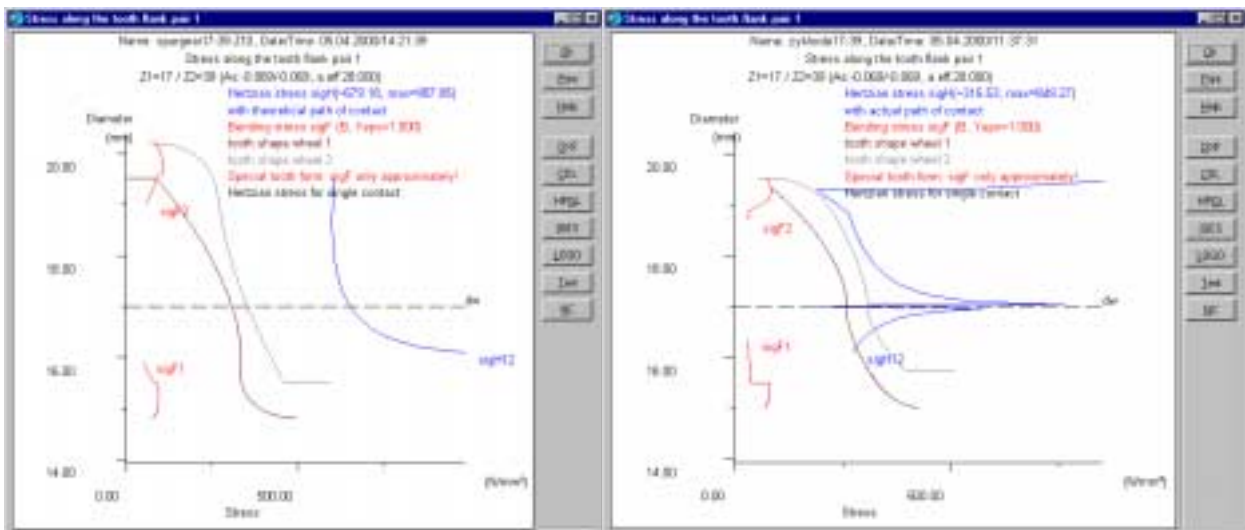


Abbildung 3 : Verlauf der Zahnfußspannung (sowie der Hertzchen Pressung), berechnet auf Grund der tatsächlichen Zahnform und Eingriffsverhältnisse

### 2.3. Festigkeitsanalyse von nicht-evolventischen Zahnformen

Die in Kap. 2.2. beschriebenen Algorithmen sind vom allgemeinen Verzahnungsgesetz abgeleitet und können deshalb sowohl für modifizierte Evolventenverzahnungen als auch für nicht-evolventische Zahnformen verwendet werden.

Wegen der direkten Integration von solchen Sonder-Zahnformen in der Software können sehr bequem und äusserst schnell Vergleichsberechnungen zwischen evolventischen und nicht-evolventischen Zahnformen durchgeführt werden. Bei einer Zahnradpumpe für ein Motorsport-Fahrzeug konnte beispielsweise das Gewicht wesentlich reduziert werden, indem an Stelle von Evolventen-Zahnradern aus metallischem Werkstoff eine Zykloide aus Kunststoff eingesetzt wurde. Die Hertzische Pressung und die Gleitgeschwindigkeiten reduzieren sich wegen der optimalen Krümmung von Zykloiden (fig. 4) um fast 50% (vor allem in den kritischen Bereichen an Kopf und Fuss)!



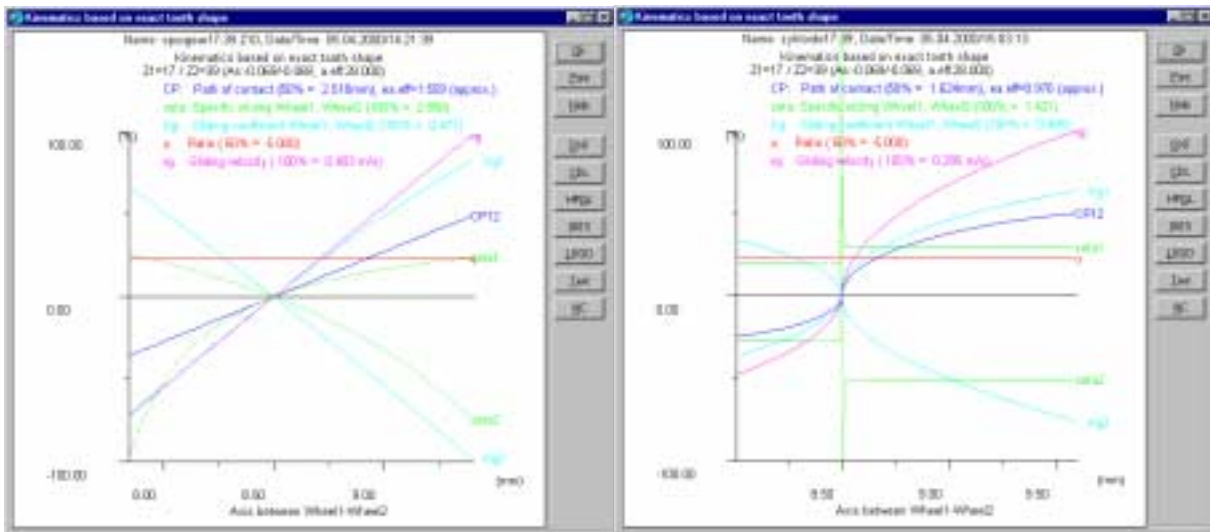


Abbildung 4: Vergleich der Hertzischen Pressung und der kinematischen Verhältnisse einer Evolventen-Verzahnung mit einem Zykloiden-Radpaar (Zähnezahlen 17:39)

#### 2.4. Zahneingriffs-Steifigkeit

Die Zahnpaar-Steifigkeit variiert während dem Eingriffszyklus und ist oft die Ursache für Vibrationen und Lärm. In KISSsoft ist eine Prozedur implementiert, welche die Eingriffssteifigkeit bestimmt:

- Die genaue Zahnform wird berechnet (indem der Herstellungsprozess mit den Werkzeugdaten simuliert wird)
- Danach wird für jede Position des Eingriffszyklus der beiden Zähne die jeweilige Zahnsteifigkeit bestimmt.
- Durch Superposition der einzelnen Steifigkeiten aller Zähne in Kontakt wird die gesamte erforderliche Steifigkeit berechnet.

Diese ziemlich komplexe Berechnung ist in der Optimierungsprozedur integriert. (Stufen 1 und 2 im Kapitel 2.1). Da die Eingriffssteifigkeit variiert, wird jedes Ergebnis auf dem Bildschirm ausgegeben. Wenn möglichst wenig Vibration erreicht werden soll, muss das Ergebnis mit der tiefsten Steifigkeitsvariation gewählt werden.

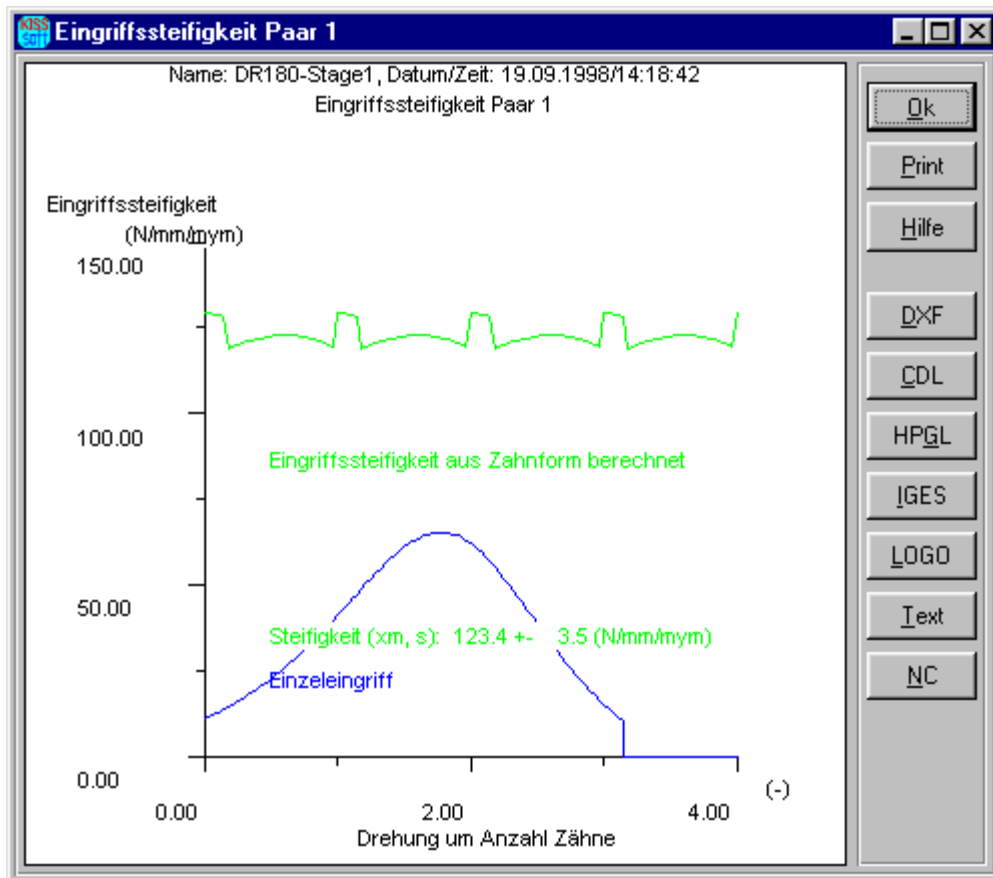


Abbildung 5 Die Eingriffssteifigkeit eines Zahnpaares mit tiefem Zahnprofil

### 3. Zahnradberechnungen mit KISSsoft

KISSsoft ist ein umfangreiches Berechnungspaket für den Maschinenbau. Neben Wellen, Achsen, Trägern, Wälz- und Gleitlagern, Schrauben, Wellen-Naben-Verbindungen usw. können insbesondere auch Zahnräder berechnet werden.

Die Zahnradberechnungen beinhalten neben Stirnrädern auch Kegel-, Schnecken- und Schraubräder. Als Konfigurationen lassen sich Zahnradpaare, Planetenstufen, Verlagerungsgetriebe (mit drei oder vier Rädern) und Zahnstangentriebe berechnen.

Die Stirnradberechnung ist sehr umfangreich und differenziert, damit dem ausgewiesenen Spezialisten alle Möglichkeiten zur detaillierten Auslegung eines Zahnrades gegeben sind. Durch das geschickte Verteilen der Eingaben in Fenster mit notwendigen und solche mit optionalen Angaben ist das Programm aber auch sehr bedienungsfreundlich bei nur gelegentlichem Gebrauch.

Die Berechnungen der Zahn-Geometrie mit allen Kontrollmassen und Toleranzen sowie die Festigkeitsberechnung sind im gleichem Programm integriert, eine wichtige Voraussetzung um schnell und sicher Varianten untersuchen zu können. Wird keine Festigkeitsberechnung gewünscht, kann diese einfach ausgeschaltet werden. Als sehr angenehm erweist sich auch die direkte Visualisierung des Zahnradpaares. Durch Anklicken in der Hauptmaske wird sofort der Zahneingriff dargestellt. Die Zahnform wird auf 1/10000 mm genau über die korrekte Simulation des Herstellprozesses bestimmt (Abb.1).

Neben allen Eingabe-Optionen sind Auslegungshilfen für viele der kritischen Parameter, wie z.B. die Profilverchiebung vorhanden. Hierzu werden Vorgaben für ausgeglichenes spezifisches Gleiten, für ausgeglichene Gleitgeschwindigkeit bei Turbogetrieben oder anderen Verfahren

angegeben. Bei der Eingabe des Bezugsprofils kann über die Auslegungsfunktion die Angabe erhalten werden, mit welcher Profilhöhe eine gewünschte Profilüberdeckung erreicht wird (für Hochverzahnungen).

### 3.1. Festigkeitsberechnungen mit verschiedenen Methoden

In KISSsoft sind verschiedene Rechenmethoden integriert. Diese wird in der Hauptmaske (Abb.2) über eine Auswahlliste ausgewählt. Die Festigkeit einer Verzahnung kann so durch einfaches Umschalten der Methode ohne Zusatzaufwand nach DIN3990, ISO6336 und AGMA2001 überprüft werden. Für Zahnräder aus Kunststoff, die nicht mit den vorgenannten Methoden berechnet werden können, steht die Festigkeitsberechnung nach VDI2545 zu Verfügung.

### 3.2. Optimierung von Zahnrädern

Ein ganz wesentlicher Schwerpunkt der Berechnungssoftware sind die Auslegungs- und Optimierungsfunktionen. Mit der Grobauslegung kann bei Vorgabe der Leistung und der Sollsicherheiten von KISSsoft die komplette Auslegung (Modul, Zähnezahl, Zahnbreite, Achsabstand usw.) einer Zahnradstufe ausgeführt werden. Für wesentliche Parameter werden dabei Intervalle vorgegeben, wodurch eine technisch optimal passende Lösung gefunden werden kann.

Die Feinauslegung erlaubt es, eine Zahnradstufe mit genau festgelegten Randbedingungen gezielt zu optimieren. Zum Beispiel ist einer der häufigsten Anwendungsfälle in der Praxis ist die Problemstellung, bei vorgegebenem Achsabstand und Zahnbreiten ein Zahnradpaar bezüglich Festigkeit oder Lärmentwicklung wesentlich zu verbessern. Gerade für solche Probleme ist die Feinauslegung entwickelt worden. Sie gibt eine Liste mit sämtlichen möglichen Zahngeometrie-Varianten für das gestellte Problem aus. Alle Varianten sind vollständig mit Geometrie und Festigkeit nachgerechnet und kontrolliert; sie werden numeriert und nach verschiedensten Kriterien wie Tragfähigkeit, Abweichung von der gewünschten Sollübersetzung, Geräuschentwicklung, Wirkungsgrad, spezifischem Gleiten, Gewicht und Trägheitsmoment qualifiziert. Damit kann nun der Ingenieur die bestgeeignete Lösung auswählen und per Knopfdruck in das Hauptprogramm übernehmen.

### 3.3. Zusätzliche Berechnungsoptionen

Neben der klassischen Nachrechnung und den zuvor beschriebenen Optimierungsfunktionen sind seit der ersten Programmversion von 1985 sehr viele zusätzliche Berechnungen entstanden, die die Arbeit bei der Auslegung von Zahnrädern unterstützen. Beispielsweise kann über die Berechnung des Schubspannungsverlaufs (senkrecht zur Zahnoberfläche) ein Vorschlag für die Einhärte-Tiefe für Einsatz- oder Nitrier-Stähle ausgegeben werden (Abb.6). Je nach Krümmung der Flanken kann so die Verweilzeit im Ofen beim Härteprozess wesentlich verkürzt und dadurch Kosten gespart werden.

Für Zahnräder aus Kunststoff (oder auch für gesinterte Zahnräder) kann die Zahnform für die Herstellung einer optimalen Gußform modifiziert werden. Damit wird das Schwinden des Kunststoffs beim Erstarren kompensiert. Der relativ grosse Teilungsfehler bei solchen Rädern kann durch eine softwaremässig optimal ausgelegte Einlaufkurve am Zahnkopf kompensiert werden.

Für den Automobil- oder Kranbau können die Berechnungen mit vorgegebenen oder frei definierbaren Lastkollektiven durchgeführt werden.

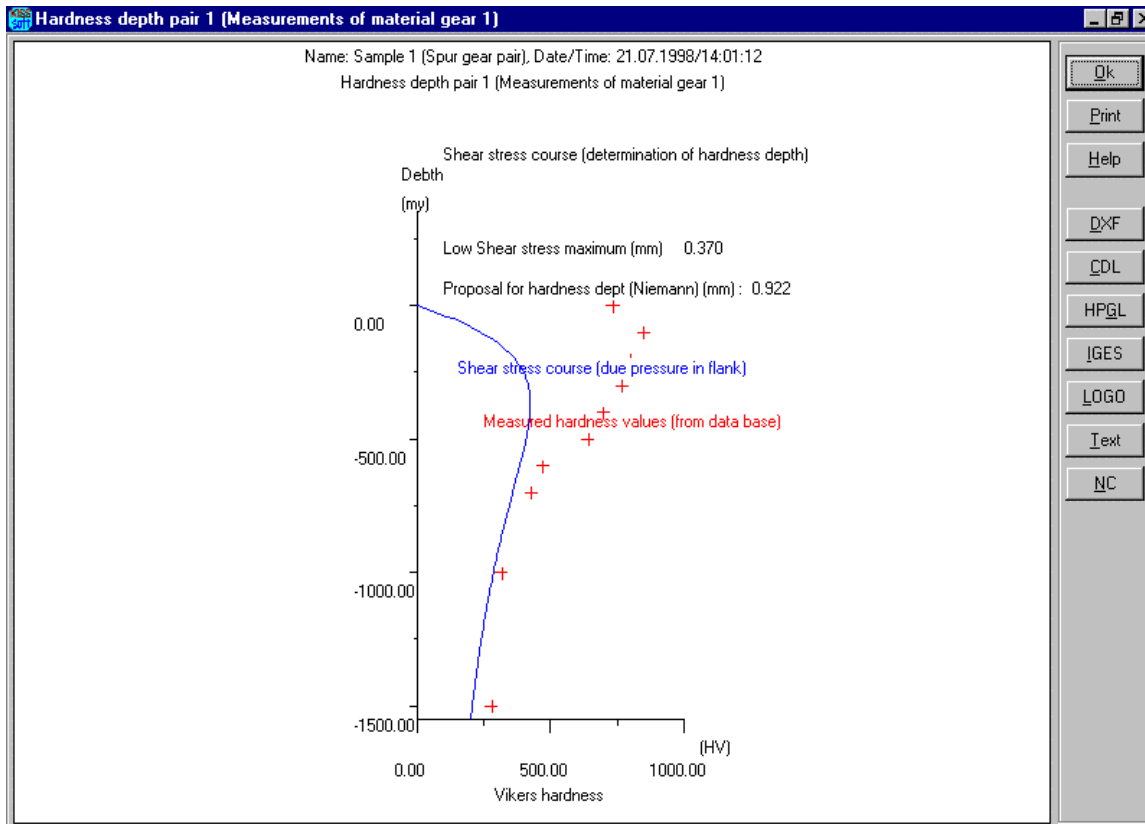


Abbildung 6 Bestimmung der einhärte tiefe (die Scherspannung, senkrecht zur Zahn- oberfläche, sowie gemessene Härte werte sind dargestellt)

#### 4. ENTWICKLUNG DER BERECHNUNGSMÖGLICHKEITEN FÜR DIE AUSLEGUNG VON GETRIEBEN

In diesem Artikel wird die Unterstützung durch Software für die Optimierung von Zahnradpaaren beschrieben. Ein Zahnradpaar ist jedoch nur ein Element in einem Getriebe. Eine für den Ingenieur sehr wichtige Weiterentwicklung von Software muss deshalb auf die ganzheitliche Betrachtung von Antriebssystemen hingehen. Dies ist das Ziel einer neuen Software KISSsys, welche hier nur kurz erwähnt und in einem späteren Artikel ausführlich beschrieben wird.

Mit KISSsys ist es möglich, ein System von Maschinenteilen, z. B. eine Kupplung, zu definieren. Die allgemeinen Parameter (für eine Kupplung wären das Drehmoment, Anzahl Umdrehungen, äussere Kräfte und andere Parameter wie Temperatur) werden ebenfalls in KISSsys definiert. Die Details der Teile des Systems werden mit der bewährten Software KISSsoft ausgelegt und optimiert. KISSsoft bietet dazu eine grosse Auswahl an Berechnungsprozeduren. KISSsys verwaltet alle Daten und berechnet lokale Kräfte und die Drehzahlen aus den allgemeinen Parametern, die dann für die Berechnung der einzelnen Teile benutzt werden. Der Benutzer hat die Auswahl zwischen verschiedenen Ansichten: eine graphische Ansicht, um Kinematiken zu berechnen, eine Baumansicht für die logische Struktur eines Systems, und Tabellen um verschiedene Varianten des Systems und die spezifischen, für die Berechnung benötigten Daten, zu verwalten. Innerhalb KISSsys können Beziehungen zwischen Teilen oder Variablen, definiert werden, es können sogar Funktionen wie in Tabellenkalkulationsprogrammen verwendet werden. Für jedes Kraftübertragungssystem, das aus mehr als einem Zahnradpaar besteht, ist KISSsys ein Werkzeug mit grossen Möglichkeiten.

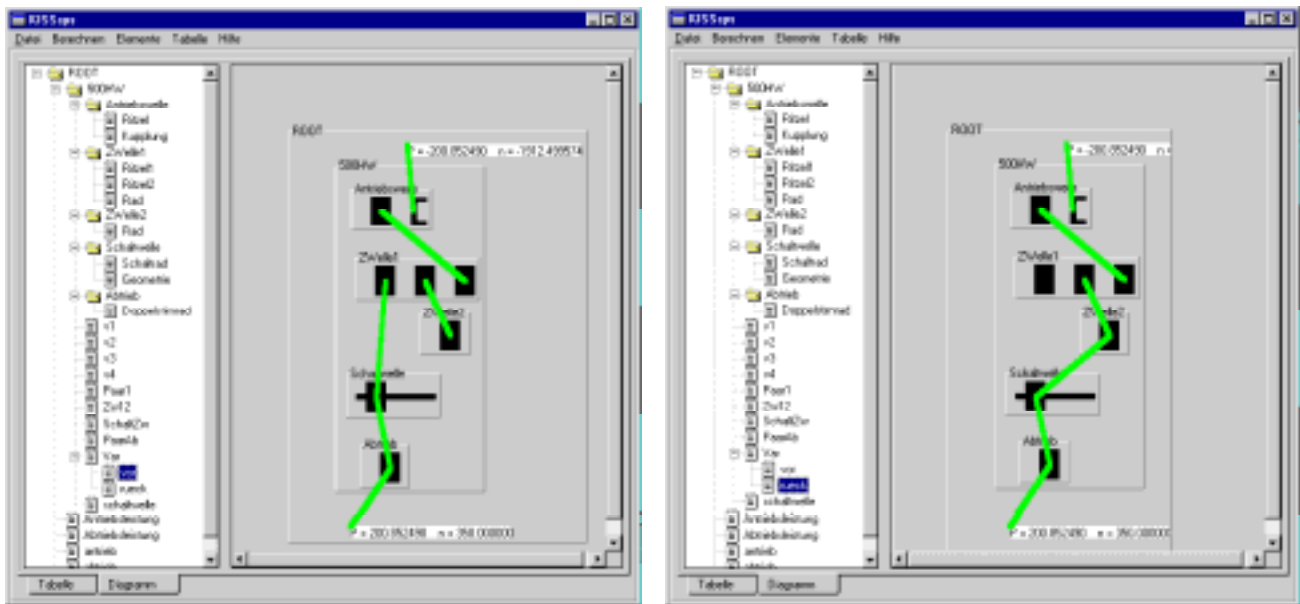


Abbildung 7: Zwei Schaltzustände eines Getriebes. In der Abbildung links ist die Schaltung auf vorwärts gestellt, rechts die Schaltung auf rückwärts. Mit einem einzigen Mausklick kann umgeschaltet werden.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG

Die Leistungsdichte von Zahnradgetrieben kann heute wesentlich erhöht und die Geräuschentwicklung reduziert werden. Durch den Einsatz von spezialisierter, benutzerfreundlicher Software kann eine solche Optimierung durch den Entwicklungsingenieur in kurzer Zeit durchgeführt werden. Dabei lassen sich die Herstellkosten durch die kleinere Baugröße zusätzlich auch noch reduzieren.

[1] KISSsoft, Calculation Programs for Machine Design, [www.KISSsoft.ch](http://www.KISSsoft.ch).

[2] Obsieger, B.: Zahnformfaktoren von Aussen- und Innenverzahnungen, Konstruktion 32 (1980) S. 443-447.

[3] Kissling, U.: Noise and Vibration Reduction in cylindrical Gears by an accurate Optimising Procedure implemented in KISSsoft, Proceedings of the international gearing conference, Paris, 1999.